Classe de seconde

Exercices de Mathématiques

1 Calculer les fractions suivantes :

$$A = 1 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{6} : \frac{3}{4}$$
$$B = (7 - \frac{3}{2}) \times (\frac{25}{7} + \frac{3}{5})$$
$$C = \frac{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}$$
$$D = \frac{\frac{25}{16} \times \frac{24}{15} + 1}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

2 Soit $x = 2 + \frac{3}{4}$ $\quad y = \frac{4}{5} : \frac{2}{15}$ $\quad z = -\frac{1}{3}$

Calculer :

$A = 4x + 10y + 6z$

$B = \frac{x+y}{\frac{1}{z}}$

3 Calculer :

$a = \sqrt{49}$

$b = \sqrt{1080}$

$c = 5\sqrt{75} + 7\sqrt{27} - 4\sqrt{48}$

$d = (\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} - \sqrt{72} + 2\sqrt{32})$

$e = \sqrt{\frac{7}{3}} + 3\sqrt{\frac{28}{27}} - 4\sqrt{\frac{65}{75}}$

$f = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

4 Ecrire sous forme scientifique :

$A = 325000000 \times 0,000004$

$B = 3 \times 10^7 \times 4 \times 10^2 \times 12 \times 10^{-8}$

$C = 21 \times 10^{-4} - 1,1 \times 10^{-3} - 0,0001$

$D = \frac{18 \times 10^{-4} \times (2 \times 10^3)^3}{(3 \times 10^4)^2 \times (10^2)^{-1}}$

$E = (0,1)^5 \times (-0,001)^{-2} \times (0,01)^2$

$F = \frac{21 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 \times 7 \times 10^8 \times 0,3 \times 10^{-4}}{6,3 \times 10^5 \times 25 \times 10^{-4} \times 21 \times 10^3}$

5 Calculer :

$$A = (-2)^3 \times 5 + 3^2 \times 2^4 - 5 \times 2^2$$
$$B = 9 \times (\frac{2}{3})^2 - (3^2 \times 2)^4 - 5 \times 2^2$$
$$C = \frac{(5^2 \times 3^3)^2 \times 2^{-2} \times (-3)^{-2}}{(3^2 \times 2^4)^3 \times 2^{-3} \times 5}$$
$$D = \frac{(3 \times 10{-}2)^3 \times (5^2 \times 10^4)^2}{6 \times 10^3 \times 25 \times 10^7}$$

6 Comparer les nombres suivants en comparant au préalable leurs carrés :

$a = 3\sqrt{3}$ *et* $b = 4\sqrt{2}$

$c = -2\sqrt{7}$ *et* $d = -10$

$e = 2 + \sqrt{5}$ *et* $f = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

$g = 1 + \sqrt{5}$ $\quad h = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

7 Soit $X = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

a) Montrer que $X < 0$.

b) Calculer X^2

c) En déduire la valeur de X.

8 Ecrire les expressions suivantes sous la forme : $\quad 2^n \times 3^p \times 5^q \times 7^m$

$E = \frac{12^3 \times 3^{-4} \times (-2)^{-2}}{7^{-1} \times (2^2 \times 7^3)^6}$

$F = \frac{(2^4 \times 3^{-3})^2 \times (-9)^2 \times 25}{(-2)^4 \times (-5)^3}$

Devoir

I Calculer :

$$a = 2 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3}$$

$$b = (\frac{1}{5} + \frac{2}{3})(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$$

$$c = \frac{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}$$

$$d = \frac{2 + \frac{1}{3}}{7 - \frac{3}{5}}$$

II Pour $x = -\frac{1}{2}$, calculer :

$$A = 4x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$B = \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

III Effectuer les calculs suivants :

$$a = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{7}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{2}}$$

$$b = \frac{1,3 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^5 \times 9 \times 10^3 \times 6,5}{0,065 \times 2600 \times 10^{-3} \times 0,036}$$

$$c = \frac{3 \times 10^7}{21 \times 10^{-8}} + \frac{10^{15}}{7} - \frac{10^{10}}{35^{-6}}$$

$$d = \frac{10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times (-3)}{11 \times 10^{-2} + 11 \times 10^{-3} + 0,002}$$

IV Simplifier :

$$A = \frac{a^{-4}b^5(ac^2)^3}{(ba^{-2})^5}$$

$$B = \frac{a^8b^6c^4}{a^{10}b^8c^6}$$

V Soit $X = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

a) Etudier le signe de X

b) Calculer X^2.

c) En déduire X.

VI

La sphère atomique de l'argon a un rayon égal à 0,98 Å.

Combien d'atomes d'argon doit-on placer en file l'un derrière l'autre pour obtenir une longueur de 1 mm. (rappel : 1Å=10^{-10} m.)

VII

La vitesse de la lumière est estimée à 3×10^8 m/s et la distance moyenne Terre-Soleil à 149 millions de kilomètres. Calculer le temps nécessaire à un signal lumineux issu de la Terre pour parvenir au Soleil.

IX Le nombre d'or est le nombre :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Vérifier les égalités suivantes :

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1$$

$$\phi^3 = 2\Phi + 1$$

Exercices d'évaluation de fin d'année

Exercice n°1

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{2x-3}{2}+\frac{1-3x}{6}=2-\frac{-3+x}{3}$$

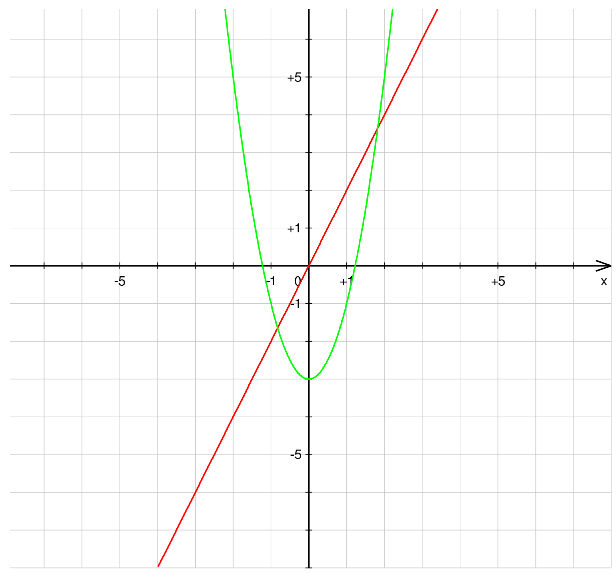
$$\frac{(2-3x)(x-2)}{x(1-x)}\geq 0$$

Exercice n°2

Sur la figure ci-contre, la fonction f(x) est représentée en vert et la fonction g(x) en rouge. L'unité est le carreau.

1°) a) Quelle est l'image de 1 par f ?

b) Quel est l'antécédant de 4 par g ?



2°) Tracer le tableau de variation de la fonction f.

3°) Résoudre graphiquement :

f(x)=2
f(x)≤ 0
f(x)=g(x)
f(x)≤g(x)
f(x)≥g(x)

4°) Tracer la représentation graphique de la fonction affine :
$h(x) = 3 - x$

5°)Déterminer l'expression de la fonction affine g(x)

6°) a) Résoudre par le calcul, l'équation : g(x)=h(x).

b) Expliquer comment retrouver ce résultat graphiquement.

Exercice n°3

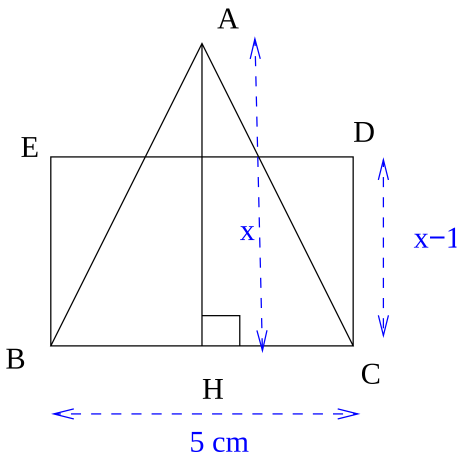
1°) a) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases}$$

b) Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, tracer les droites (D) et (D') d'équation $2x+y-4=0$ et $x-3y+5=0$.

c) Vérifier graphiquement le résultat du 1°).

Exercice n°4



L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire est le cm^2.

ABC est un triangle isocèle en A tel que BC = 5.

H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose AH = x.

BCDE est un rectangle tel que BC = 5 et EB $= x - 1$

1°) Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du triangle ABC et l'aire g(x) du rectangle BCDE.

2°) Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonction f et g. (les calculs devront figurer sur la copie.)

3°) Trouver la hauteur AH pour laquelle le triangle ABC et le rectangle BCDE ont la même aire.

On traitera cette question graphiquement et algébriquement.

Exercice n°5

Soit ABCD un parallélogramme.

Construire les points E, F, G et H tels que

$\overrightarrow{DE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$.

Montrer que EFGH est un parallélogramme.

Exercice n°6

Dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, on donne les points A(2 ; 5), B(4 ; −2), C(−5 ; 1) et D(−1 ; 6).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ et de la longueur AB.

2. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?

3. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Déterminer les coordonnées du point K.

4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].

5. Démontrer que les points I, K et A sont alignés.

1 Dire auxquels des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ appartiennent les nombres suivants :

-2 ; 5 ; 0 ; $\dfrac{3}{6}$; $\dfrac{7}{3}$; $2\sqrt{2}$; $\pi - 1$; $\dfrac{357}{102}$; 10^4 ; 10^{-2} ; -3×10^2 ; $3\sqrt{75} - 3\sqrt{27} - 3\sqrt{12}$; $3 \times 10^5 + 24 \times 10^3$.

2 Déterminer la nature des nombres suivants :

A $= -\dfrac{\sqrt{144}}{3}$

B $= \dfrac{\pi}{314}$

C $= \dfrac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)}{400}$

D=0,3333

E=$\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}$

3 Ecrire sous forme d'intervalles ($x \in$ ...) :

$$-5 < x \leq 2$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

$$x \leq -\frac{1}{4}$$

$$x > -5 \textit{ et } x \leq 3,5$$

4 Ecrire plus simplement :

$$[-6; 2[\ \cap\ ]-4; 1]$$

$$-1; 3]\ \cap\ [2; 4[$$

$$]-\infty; 4[\ \cap]\ 2; +\infty[$$

$$]-\infty; -3]\ \cap\ [2; +\infty[$$

$$[-1; +\infty[\ \cap\ [3; +\infty[$$

$$]-\infty; 2]\ \cap\ [2; 4[$$

5 Ecrire plus simplement :

$$[-2; 3[\ \cup\ ]1; 4[$$

$$]-\infty; 1]\ \cup\ [-2; +\infty[$$

$$]-5; 2]\ \cup\ [4; +\infty[$$

$$]2; +\infty[\ \cup\ [-1; +\infty[$$

$$x\ \in]-2; 3]\ \textit{ou}\ x\ \in\ [1; +\infty[$$

$$x\ \in\ ]-2; 3]\ \textit{et}\ x\ \in\ [1; +\infty[$$

6 La longueur L d'une planche est de 1,246 m à 1mm près.

Donner un encadrement de la valeur de L.

Sa largeur est de 0,242 m à 1 mm près.

Donner un encadrement de sa largeur puis de son aire.

7 Deux nombres a et b vérifient les conditions :
$a + b = 1$ et $a^2 + b^2 = 2$

a) Calculer la valeur du réel ab.

a et b sont-ils des entiers relatifs ?

b) Vérifier que les deux réels $a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $b = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ vérifient les conditions imposées.

c) Utiliser la calculatrice pour donner les arrondis, notés a' et b' à 10^{-5} de a et de b.

d) L'arrondi à 10^{-5} près de $a^2 + b^2$ est-il égale à l'arrondi à 10^{-5} près de $a'^2 + b'^2$?

8 Déterminer à quels intervalles appartiennent les nombres x, y et z sachant que :

• l'arrondi de x à 10^{-2} près est 2,52.

• la valeur approchée par défaut de y à 10^{-2} près est 4,21.

• la valeur approchée par excès de z à 10^{-2} près est 12,340

9 Soit :

$$A = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + \sqrt{3}$$

$$B = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}$$

$$C = \frac{(2 \times 10^3)^2 \times 9 \times 10^{-5}}{3 \times (10^{-1})^2}$$

$$D = 15 \times 10^{-24} + 1,1 \times 10^{-23} + 10^{-25}$$

Indiquer à quels ensembles parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$,$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ appartiennent ces nombres.

10 Soit $E = -\frac{13}{80}$ et $F = \frac{17}{26}$.

a) En utilisant la calculatrice, expliquer comment le résultat d'une division permet de dire que $E \in \mathbb{D}$ et que $F \notin \mathbb{D}$.

b)Montrer que E peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour E ?

c) Expliquer pourquoi F ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

11 On rappelle que le nombre $\frac{5}{27}$ peut s'écrire sous la forme 0,185$\underline{185}$... où les chiffres soulignés sont la partie décimale qui se répète indéfiniment.

Les nombres qui peuvent s'écrire sous cette forme sont des éléments de $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels).

1°) Ecrire sous cette forme les rationnels suivants : $\frac{2}{3}$ et $-\frac{4}{7}$.

2°) On veut écrire sous forme de fraction le nombre x=8,33$\underline{3}$...

a) Calculer 10x-x où x=8,33$\underline{3}$...

b) En déduire la valeur de x sous forme de fraction.

c) Ecrire de même les nombres y= 0,77$\underline{7}$... et z=0,2323$\underline{23}$...

12 1°) x et y sont deux nombres inverses, quel est leur produit ?

2°) soit x=0,18$\underline{18}$... ; y=5,5 et z=0,318309886.

a) A l'aide de la calculatrice peut-on dire que x et y sont inverses ? que z et π sont inverses ?

b) Ecrire x et y sous forme de fractions. Sont-ils inverses ?

c) Est-ce que z et π sont éléments de $\mathbb{Q}$. Sont-ils inverses ?

Nombres premiers

13 a) Décomposer en nombres premiers 360 et 480.

En déduire PGCD(360 ;480).

b) Calculer PGCD(7077 ;18872) par l'algorithme d'Euclide.

En déduire une simplification de $\frac{7077}{18872}$.

c) Décomposer en nombres premiers 4737600.

Simplifier $\sqrt{4737600}$.

d) Ecrire les dix premiers multiples de 105 et de 175.

Calculer $\frac{11}{105} + \frac{1}{175}$.

14 Un nombre parfait est un entier naturel égal à la somme de ses diviseurs, autres que lui-même.

Ainsi, 6 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$.

Trouver le seul nombre parfait compris entre 25 et 30.

15 Deux entiers positifs m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (autres que m) est égale à n et simultanément la somme des diviseurs de n (autres que n) est égale à m.

Les plus petits nombres amicaux sont 220 et 284.

a) Décomposer en produit de nombres premiers 220 et 284.

b) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

16 Deux voitures font des tours sur un circuit fermé ; elles partent toutes les deux à midi de la ligne de départ. L'une parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes.

A quelle heure les deux voitures repasseront-elles en même temps la ligne de départ ?

Combien auront-elles fait de tours ?

17 1°) a) Développer et réduire l'expression : $(n+1)^2 - n^2$.

b) En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés.

2°) Application à faire aux entiers 13 et 45.

18 1. Calculer le produit de quatre entiers consécutifs et ajouter 1.

Que remarque-t-on ? (Faire plusieurs essais)

2. Montrer que, pour tout réel x, on a $a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+3a+1)^2$

Expliquer le résultat observé à la question 1.

19 1. Calculer la somme de 5 entiers consécutifs. Que remarque-ton ? (Faire plusieurs essais)

2. Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5

20 1. Un nombre pair s'écrit sous la forme ....

Un nombre impair s'écrit sous la forme ....

2. Montrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair

3. Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair

4. a) Calculer la somme de trois entiers impairs consécutifs.

Le résultat est-il un nombre premier ? (Faire plusieurs essais)

b) Démontrer ce que vus avez observé à la question a)

5. a) Développer et réduire l'expression

b) En déduire que tout nombre impair s'écrit comme la différence des carrés

de deux entiers consécutifs.

c) Appliquer ce résultat aux entiers 13, 45 et 101.

21 Déterminer si les nombres suivants sont premiers. S'ils ne sont pas premiers, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers.

27 35 56 31 17 147 264 81 105 621 819000

22 Dans chacun des cas suivants, déterminer le(s) chiffre(s) a, b, c sachant que :

23a4 est divisible par 3.

23a4 est divisible par 3 mais pas par 9.

23b5c est divisible par 3 et par 5.

23 Soit le nombre A $=2^3 \times 5^2 \times 7$.

1/ Vérifier que A possède 24 diviseurs.

2/ Trouver le plus petit entier naturel k tel que kA soit le carré d'un entier.

3/ Trouver le plus petit entier naturel m tel que mA soit le cube d'un entier.

Devoir n°1

I 1/ Après avoir simplifier au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.
Donner aussi leur nature.

a) $\dfrac{0,21}{1,05}$ $\dfrac{7^{14}}{3^6}$ $\dfrac{18}{5\sqrt{81}}$

$\dfrac{16}{6}-\dfrac{11}{3}$ $\dfrac{-8}{-2}$ $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}-2\sqrt{2}$

2/ a) Donner un rationnel non décimal.
b) Donner un réel non rationnel.
c) Donner un décimal non entier.
d) Donner un entier non naturel.

II 1°) Donner la définition de nombre premier.
2°) Donner 8 nombres premiers.
3°) Déterminer si les nombres suivants sont premiers. S'ils ne le sont pas, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers.

a) 3 036 b) 325 325 c) 127 d) 33
649

4°) Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible en décomposant en produit de facteurs premiers le numérateur et le dénominateur. Préciser quels sont les nombres décimaux.

$\dfrac{126}{189}$ $\dfrac{585}{1500}$ $\dfrac{360}{2772}$

5/ Simplifier les racines carrées suivantes en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

$\sqrt{231000}$ $\sqrt{3825}$ $\sqrt{127}$

6/ Donner le PGCD des nombres suivants en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

a) PGCD (220 ; 798)
b) PGCD (29 260 ; 55 176)

III Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont écrits en notation scientifique. Ecrire les autres sous forme scientifique.

a) 12×10^{-3} b) $6,4\times10^{5}$
c)$5,03\times10^{-4}$

d) $0,124\times10^{2}$ e) $-34,56\times10^{2}$

Devoir n°2

I 1) Le nombre 403 est-il premier ? Justifier.
2) Le nombre 307 est-il premier ? Justifier.
3) Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :
A = 252 B = $28\times55\times44$

II 1) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de A = $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2$ puis Développer A .

2) Simplifier $\dfrac{8\sqrt{2}+56}{16}$

3) Ecrire sous forme de fraction irréductible :
A=$\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{5}$

III Simplifier les expressions suivantes, en montrant les étapes de simplification :

A=$\dfrac{10^9\times6^3}{25^4\times3\times2^11}$

B= $\dfrac{1}{10^{118}}-\dfrac{1}{10^{119}}$

C =$5^{108}\times2^{106}\times11\times\dfrac{1}{}$

IV 1) Montrer que pour tout nombre a et b de on a l'égalité suivante :

$(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

2) Utiliser cette égalité pour factoriser (x^3-8)

V Ecrire A =$\sqrt{98}+\sqrt{2}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est le plus petit possible.

Ce nombre est-il un élément de $\mathbb{Q}$?

1 1°) Ecrire un encadrement de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près et à 10^{-3} près.
2°) Ecrire un encadrement de $-\sqrt{7}$ à 10^{-2} près et à 10^{-3} près.
3°) Soit $x = \dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}$. Ecrire un encadrement de x à 10^{-2} près.

2 On donne

$$\begin{array}{rcr} 3,01 & \leq x \leq & 3,02 \\ 7,48 & \leq y \leq & 7,49 \\ -3,25 & \leq z \leq & -3,24 \\ -1,12 & \leq t \leq & -1,11 \end{array}$$

Donner un encadrement à 10^{-2} près de $x+y$; $x-y$; $2x-3y+5z$; xy ; yz ; zt ; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{z}$; $\frac{y}{z}$; x^2 et z^2.

3 Donner un encadrement de l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont 10 cm et 5 cm avec une précision de 1 mm.

4 En utilisant l'encadrement
$1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$
donner un encadrement de $A = 2+\sqrt{3}$; $B = 1-2\sqrt{3}$ et $C = \dfrac{2-3\sqrt{3}}{5}$.

5 a et b sont deux réels non nuls de même signe.
Comparer $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et 2.

6 Soient deux réels x et y strictement positifs.
1°) Démontrer que $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$
2°) Démontrer que $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

7 Ecrire sans barres de valeurs absolues, les nombres suivants :

$$x = |\sqrt{2}-1| \quad y = |\sqrt{3}-5| \quad z = |\pi - 5|$$

$$t = |7-2\pi| \quad v = |3-\pi|$$

8 Compléter le tableau suivant :

Reproduire sur un axe	Traduction en valeurs absolues	Traduction en distances	Traduction avec des inégalités	Traduction avec des intervalles
-1 0 3 ——[—-I——]—-	$\|x-1\| \leq 2$	$d(x;1) \leq 2$	$-1 \leq x \leq 3$	$x \in [-1;3]$
	$\|x-3\| \leq 1$			
		$d(x;-4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$	
			$x \in [6;10]$	
	$\|x\| > 3$			
			$x \leq -4$ ou $x \geq 2$	
	$\|x+2\| < 1$			
-2 0 4 ——]——I——[–				
0 2 ——]———[—-				

Devoir n°1

I a) Comparer en écrivant au même dénominateur :$\frac{15}{16}$ et $\frac{16}{17}$.
b) Comparer en utilisant la calculatrice : $\frac{123856}{123857}$ et $\frac{123857}{123858}$.
c) Comparer : $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n+1}{n+2}$.

II On sait que $0,8 < x < 0,9$.
Ecrire un encadrement de $y = 1 - \frac{3}{x+1}$ et de $z = \frac{2}{1-x}$.

III Sachant que l'on a :
$-2,7 \leq x \leq -2,5$
$-5,1 \leq b \leq -5$
Donner un encadrement de $a+b$; $a-b$; ab ; $\frac{1}{b}$ et $\frac{a}{b}$.

IV Ecrire sans barres de valeur absolue chacun des nombres suivants :

$|-3|$ $\qquad |10^{-5}|$

$|5 - \frac{131}{3}$ $\qquad -|-23| - |23-31|$

$|2(5-12)| + |1 - \frac{3}{2}|$ $\qquad |2 - \sqrt{3}|$

$|-2 \times 10^{-3}|$ $\qquad |5 - 4\sqrt{2}|$

$|3 - \pi|$

V Soit $f(x) = |2x-3| - |1-5x|$

a) Calculer $f(2)$; $f(\sqrt{2})$; $f(\frac{3}{2})$ et $f(\frac{1}{5})$.

b) Compléter :
Si $2x - 3 \geq 0$, c'est à dire si $x \geq$ ...... alors
$|2x-3| =$ ....

Si $2x - 3 \leq 0$, c'est à dire si $x \leq$ ...... alors
$|2x-3| =$ ....

c) Expliciter, de même, $|1-5x|$
d) Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$				
$\lvert 1-5x\rvert$				
$f(x)$				

VI Ecrire plus simplement :
$E = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$

VII Résoudre les équations suivantes :

$|x| < 3$ $\qquad |x| \geq 2$

$|x-2|5 \leq 3$ $\qquad |x+2| \leq 3$

$|3x-6| \geq 27$ $\qquad |x+1,33| \leq 0,7$

$2 \leq |x| \leq 5$ $\qquad |x| < x$

VIII Déterminer les nombres a et r tels que chacune des relations ci-dessous soit équivalente à $|x-a| \leq r$.

$x \in [1;3]$ $\qquad -1 \leq x \leq 5$

$5 \leq x-3 \leq 7$ $\qquad 5 \leq 2x-1 \leq 9$

IX Soit D une droite graduée. Les points A et B ont pour abscisse $x_A = 2$ et $x_B = -4$.

a) Déterminer l'ensemble des points tels que :

$d(A;M) = 5$ $\qquad d(B;M) \leq 2$
$d(A,M) \geq d(B;M)$

b) Ecrire sous forme de distance, les inégalités suivantes :

$|x-2| \geq 2$ $\qquad |2x+8| \leq 3$
$-3 < x < 7$

Devoir n°2

I Comparer les nombres suivants

a) $\sqrt{5}-2$ et $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{5}-3$ et $\sqrt{15-6\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt{5}-5$ et $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

En déduire une écriture simple de $\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

II A est un nombre strictement négatif.
Comparer dans chaque cas a et b.

a) $a=\dfrac{5A}{12}$ et $b=\dfrac{3A}{8}$

b) $a=\dfrac{5}{12}-A$ et b=$\dfrac{3}{8}-A$

c) $a=\dfrac{2}{3A}$ et $b=\dfrac{5}{6A}$

III Dans chaque cas, a et b sont deux réels strictement positifs. Comparer A et B en étudiant le signe de A− B.

a) A $=ab+1$ et B $=(a+1)(b+1)$
b) A=$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ et B=2

IV x désigne un nombre réel tel que $x \geq 2$

A $=(x-1)^2$ et B $=(x-2)^2$

a) Factoriser la différence A−B

b) En déduire le signe de A−B et comparer alors A et B

V Soient a et b deux réels strictement positifs.
Démontrer que :

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

VI Ranger dans l'ordre croissant a, a^2 et a^3 pour

a=$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et pour a $=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+1}}}$

VII x désigne un nombre réel tel que $0 \leq x \leq 1$

Comparer les nombres $(1+x)$ et $(1+x)^3$

VIII Soit x un réel vérifiant $x \leq 2$

Préciser dans quels intervalles se trouvent :

$\dfrac{1}{x}$; x^2 ; $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $\dfrac{1}{x-2}$

IX Calculer la valeur absolue des nombres suivants :

A=$10^{-4}-10^{-3}$
B=$9\times 10^{-3}-10^{-2}$
C=$\pi-4$
D=$13-4\pi$
E=$-2-\sqrt{2}$
F=$-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

X x est l'abscisse d'un point M d'une droite graduée. Les points A, B et C de cette droite ont pour abscisses respectives 3,−3 et 5

Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue et placer sur la droite les points M correspondants (une droite par question) :

1. La distance OM vaut 5
2. La distance OM est inférieure ou égale à 1
3. La distance AM vaut 7.
4. La distance CM vaut 3 et la distance AM est strictement inférieure à 2.

XI Justifier les égalités suivantes :

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$

b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$

XII Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée.

a) $|x-3|=2$
b) $|3-x|=3$

XIII Caractériser à l'aide de la notation valeur absolue l'ensemble des réels x satisfaisant à la condition indiqué :

a) x $\in [2\,;12]$
b) x $\in\,]-2\,;9[$

Devoir n°3

I Comparer :

$1+\sqrt{7}$ et $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$

II Soit x un nombre réel strictement positif. On note A $=x+\dfrac{1}{x}$ et B=2.

Comparer A et B.

III Soient m et p deux nombres réels strictement positifs tels que : m $\leq$ p.

1. Comparer $\dfrac{1}{m+3}$ et $\dfrac{1}{p+3}$

2. Comparer $\sqrt{\dfrac{m+1}{5}}$ et $\sqrt{\dfrac{p+1}{5}}$

IV b est un réel tel que :$2 \leq b \leq 3$.

1. Donner un encadrement de $\dfrac{2-b^2}{5}$.

2. On se donne de plus le réel a tel que : $1 \leq a \leq 2$.

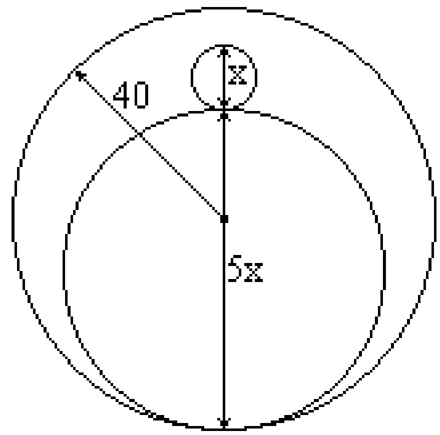
Donner un encadrement de $b-2a$.

V Ranger les nombres a, a^2, a^3 dans l'ordre croissant dans les deux cas suivants :

1. $a=\sqrt{2}-1$.

2. $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

VI



La figure représente un pièce métallique percée. La somme des périmètres des deux cercles intérieurs est entre 187 mm et 190 mm.

1. a) Exprimer la somme des périmètres P(x) des deux cercles en fonction de x.

b) Exprimer l'aire A(x) de la pièce métallique en fonction de x.

2. a) Déterminer un encadrement de x par deux décimaux d'ordre 1 (c'est à dire avec un chiffre après la virgule). Indication : utiliser le périmètre des deux cercles.

b) Encadrer l'aire par deux entiers.

1 Développer, réduire et ordonner :

$A = (x+4)(x+1)$ $B = (2x-7)(3x+2)(2-4x)$ $C = 2(3x+1)^2 - (2-x)(x+2)$
$D = (x+1)^3$ $E = (2x-3)^3$ $F = 5(4x-3)^3$

2 Factoriser les expressions suivantes :

$A = 25x^2 - 5x$
$B = (x+6)^2 - 2(x+1)(x+6)$
$C = (4x-8)(1-2x) - (9x-18)(4x-2)$
$D = (3x-2)^2 + (9x-6)(2x+1)$
$E = (x-2)(3x+1) + (2-x)(4x-5)$
$F = (5-2x)^2 + (2x-5)(3x+1)$
$G = (2x-3)^2 - (5x+1)^2$
$H = 49x^2 - 4(3x-4)^2$
$I = 4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2$
$J = 18x^3 - 24x^2 + 8x$

3 Factoriser par la technique du début d'un carré :

$A = x^2 + 2x + 3$ $B = x^2 + 4x - 5$ $C = x^2 - 2x - 3$
$D = x^2 - 3x + 3$ $E = -x^2 - 2x + 3$ $F = 2x^2 - 4x + 1$
$G = -x^2 + 5x - 3$ $H = 2x^2 - 6x + 2$ $I = 3x^2 - 12x + 6$

4 Déterminer les valeurs interdites puis simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{2x-5}{x-2} + \frac{3-5x}{3x-1} \qquad B = \frac{5}{5-2x} - \frac{x+2}{5+2x}$$

$$C = \frac{x-5}{3-x} - \frac{2x+1}{9-x^2} + \frac{1}{3+x} \qquad D = 5x + 3 + \frac{1}{5x+3}$$

5 Factoriser :

$A = x^2 - 9$

$B = 4x^2 - 25$

$C = 4x^2 - 12x + 9$

$D = 9x^2 - 12x + 4$

$E = \frac{x^2}{16} - \frac{49}{25}$

$F = \frac{49}{16} - (2-x)^2$

$G = (6x-1)^2 - 4x^2$

$H = 49x^2 - (3x-4)^2$

$I = (3x^2-4x-3)^2 - (3x^2-4x+3)^2$

$J = (2x+5)^2 - 9(4x^2-25)$

$K = (x^2-16)^2 - (x+4)^2$

$L = 4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2$

$M = 25x^2 - 5x$

$N = 49x^3 - 7x^2$

$O = 10x^3 - 15x^2 + 5x$

$P = 16x^7 - 8x^4$

$Q = 4x^3(x+3) - 2x(x+3)$

$R = (x+6)^2 - 2(x+1)(x+6)$

$S = (3x-1)(x-2) - 3x(2-x)$

$T = (4x-8)(1-2x) - (9x-18)(5-x)$

$U = xy - x - y + 1$

$V = 1 + x - y - xy$

$W = 2xy - 4y + 2 - x$

1 Résoudre les équations suivantes :

a) $-3x+5=7(2x-3)-17x$

b) $\frac{1-x}{4}-\frac{3x-2}{3}=\frac{2x+5}{6}-(3x+1)$

c) $16(x-3)^2-25=0$

d) $(x^2-16)^2=(x+4)^2$

e) $9x^3+18x^2=x+2$

2 Déterminer les valeurs interdites puis résoudre les équations :

a) $\frac{3-2x}{1-x}=0$

b) $\frac{(3x+1)^2-4(x-3)^2}{5x^2-5}=0$

c) $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+3}{x-2}$

d) $\frac{2x-2}{2x+1}=2-\frac{2x}{2x-1}$

3 Résoudre les inéquations :

a) $-2x+3\leq 4$

b) $2(3x-5)>-4+6x$

c) $(1-5x)(3x+1)\geq 0$

d) $x^2+3\geq 0$

e) $-x^2-5\geq 0$

f) $25-4x^2>0$

g) $\frac{x+1}{2-x}\leq 0$

h) $\frac{x(x^2+3)}{(2x-1)^2}<0$

4 Résoudre les inéquations :

a) $\frac{3x-2}{5-2x}\leq\frac{1-6x}{4x+1}$

b) $\frac{4x^2-12x+9-2(2x-3)(4x+1)}{(25x^2-4)(1-x)}\geq 0$

5 Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x+1<2x-3 \\ -3x+2\leq 5x+1 \end{cases}$

b) $\frac{3x-1}{6}<3x<\frac{5(1+3x)}{12}$

6 Résoudre les inéquations suivantes et donner les solutions (lorsqu'il en existe) sous la forme d'un intervalle.

a) $4x+1>x-2$

b) $8(3x-5)-5(2x-8)\leq 4(3x-1)+16$

c) $4(3x-2)\geq 7x-8$

d) $x-1\geq x+1$

e) $x^2+4<0$

f) $(x-4)^2\leq -1$

g) $4x+1>2(2x-1)$

7 Résoudre les inéquations suivantes

a) $x^2-9<0$

b) $(4x-1)(2x+3)>0$

c) $t^3-t\geq 0$

d) $-y(5+y)\leq 0$

e) $y^2+1\leq 0$

f) $3x^2<6x-3$

g) $(a+3)^2\leq(2a-5)^2$

h) $\frac{x+1}{x^2+1}<0$

i) $(y-5)(2y-14)\leq 4(3y-21)$

j) $\frac{x}{x^2-1}\leq 0$

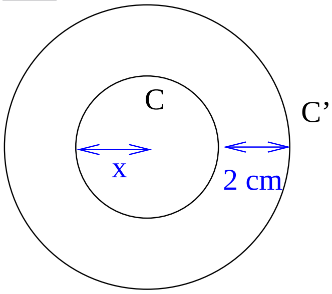
k) $\frac{2a-5}{(a+1)^2}\leq 0$

l) $\frac{(x+7)(-2-x)}{4x^2-12x+9}<0$

m) $\frac{(3-2x)(x+5)}{2x+3}\geq 0$

n) $\frac{5-3a}{a^2-4}<0$

8



C et C'' sont deux cercles concentriques.

Déterminer le rayon x du cercle intérieur, pour que l'aire de la couronne soit inférieure à 100 m^2.

9 Un particulier a des marchandises à faire transporter.

Un premier transporteur lui demande 460€ au départ et 3,5€ par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000€ au départ et 2€ par kilomètre.

Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

10 Une société veut imprimer des livres.

La location de la machine revient à 750€ par jour et les frais de fabrications'élèvent à 3,75€ par livre.

Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6€

1 On a mesuré les tailles d'un groupe de 32 enfants.

Taille en cm x_i	nb d'enfants y_i	effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants	Fréquences	$x_i y_i$
[120 ;124[	1				
[124 ;128[	7				
[128 ;132[	12				
[132 ;136[	9				
[136 ;140[	3				
Total					

1°) Indiquer ce que sont le caractère et l'effectif de cette série statistique. Le caractère est-il qualitatif ou quantitatif ? Est-il discret ou continue ? Quelle est l'étendue ?

2°) Calculer les effectifs cumulés croissants.

3°) Calculer les effectifs cumulés décroissants.

4°) Calculer les fréquences en pourcentage.

5°) A quelle classe appartient le mode ?

6°) A quelle classe appartient la médiane ?

7°) Calculer la moyenne.

8°) Tracer l'histogramme.

9°) Tracer les courbes des effectifs croissants et des effectifs décroissants. Lire la valeur de la médiane.

2 Dans un groupe de personne, 8 possèdent une voiture de marque Renault, 7 ont une voiture de marque Citroën et 5 possèdent une voiture de marque Peugeot.

Tracer le diagramme circulaire de cette série statistique.

3 Tracer l'histogramme de la série statistique suivante :

[0 ;4]	[4 ;6]	[6 ;7]	[7 ;8]	[8 ;10]	[10 ;14]	[14 ;20]
2	10	9	8	20	6	3

4 Dans le lycée Molière, le proviseur affiche les résultats obtenus au Bac.

série	nombre de candidats	taux de réussite
L	132	75 %
ES	160	85 %
S	125	80 %

1. Calculer le nombre de reçus dans chaque série.

2. a) En voyant les résultats affichés, Sébastien affirme que le taux de réussite global est de 80 %, Thomas lui dit que non.

Qui a raison ? Justifier par un calcul de moyenne.

b) Retrouver le taux de réussite au Bac dans ce lycée à l'aide du nombre total de reçus.

5

Le coucou est un oiseau qui fait couver ses oeufs par des oiseaux d'autres espèces de tailles très différentes. Une étude a été faite sur des oeufs déposés dans des nids de petite taille (nids de roitelets) ou de grande taille (nids de fauvettes). Le tableau suivant donne en mm le diamètre des oeufs.

nids de roitelets	19,8	22,1	21,5	20,9	22	22,3	21	20,3	20,9	22	20,8	21,2	21
nids de fauvettes	22	23,9	20,9	23,8	25	24	23,8	21,7	22,8	23,1	23,5	23	23,1

1. Donner pour chacune des deux séries la moyenne, la médiane et l'étendue.

2. Regrouper les valeurs des deux séries en classes. Prendre [19 ; 20[, [20 ; 21[, [21 ; 22[, [22 ; 23[pour la première série ; [20 ; 21[, [21 ; 22[, [22 ; 23[, [23 ; 24[, [24 ; 25] pour la deuxième.

3. Représenter sur un même graphique les histogrammes donnant la distribution des fréquences en utilisant deux couleurs différentes.

4. Au vu de ces résultats, quelle hypothèse peut formuler le biologiste concernant l'existence d'un lien entre la taille des nids et celle des oeufs déposés ?

6

La capacité vitale est le volume d'air maximal pouvant être mobilisé en une seule inspiration.

Sur un échantillon de 17 personnes, on a mesuré la capacité vitale (en litres). Voici la liste des résultats :

4,15 - 4,48 - 5,24 - 4,8 - 4,95 - 4,05 - 4,3 - 4,7 - 5,51 - 4,58 - 4,12 - 5,7 - 4,85 - 5,05 - 4,65 - 4,7 - 4,28.

1. Déterminer l'étendue et la moyenne de cette série. Arrondir la moyenne au centilitre près.(Pour la moyenne, on utilisera la calculatrice sans explication.)

2. En expliquant la méthode utilisée, déterminer la médiane de cette série.

3. On décide de regrouper les valeurs de la série par classes.

Compléter le tableau suivant :

capacité vitale (en litres)	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[
effectifs				
effectifs cumulés croissants				

4. a) A l'aide de cette répartition par classes, déterminer la moyenne des valeurs.

b) On admet que dans chaque classe, la répartition est uniforme.

Tracer alors la courbe des effectifs cumulés.

En déduire graphiquement le médiane de ces valeurs.

Calcul de moyennes

7 1. Après six contrôles, un élève obtient 12 de moyenne, puis 15 au septième contrôle.

Tous les contrôles ont le même coefficient. Quelle est la nouvelle moyenne ?

2. On doit déterminer la moyenne de 560 nombres. A la calculatrice, on trouve 115 comme moyenne. Mais on s'aperçoit que l'on a oublié d'entrer l'un des nombres, à savoir 171.

Expliquer comment on peut réparer cette étourderie sans recalculer la moyenne des 560 nombres.

Quelle est la moyenne des 561 nombres ?

8 Dans un lycée, il y a quatre classes de seconde contenant respectivement 30, 32, 28 et 27 élèves.

Les moyennes des notes d'Education physique de ces classes sont respectivement 12, 11, 13 et 14.

Quelle est la moyenne des notes d'Education physique pour l'ensemble des quatre classes de seconde du lycée.

9 La moyenne de cinq notes d'un élève est 12. Les quatre premières notes sont 13, 10, 8 et 15.

Quelle est la cinquième ?

10 On note m la moyenne de n nombres a_1, a_2, ...,a_n.

1°) On transforme chaque a_i de la manière suivante : on lui ajoute 1 et on multiplie le résultat obtenu par 2.

Quelle est la moyenne de cette nouvelle série de nombres ?
2°) On transforme chaque a_i de la manière suivante : on le multiplie par 2 et on ajoute 1 au résultat obtenu.

Quelle est la moyenne de cette nouvelle série de nombres ?

11 Dans une classe, il y a 20 filles et 15 garçons.

La moyenne des tailles des élèves est de 1,7 m.

La moyenne des tailles des garçons est de 1,8 m.

Quelle est la taille moyenne des filles de cette classe ?

12 Justine a 9,8 de moyenne sur les quatre contrôles du trimestre.

Mais le professeur, après s'être aperçu de son erreur dans la correction du dernier contrôle, l'a noté sur 15 et non 11.

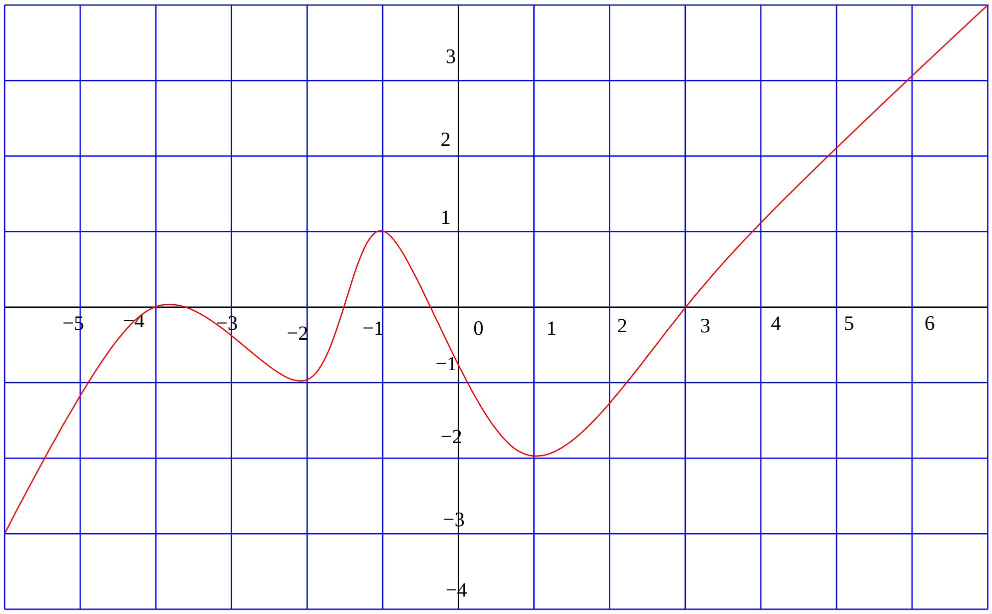
Quelle est la moyenne corrigée de Justine ?

13 Après quatre contrôles de mathématiques, Virginie a 12 de moyenne et Elodie a 10,5.

a) Virginie obtient 10 au 5^{ieme} contrôle et Elodie 15. Calculer leurs moyennes après cinq contrôles.

b) Au 6^{ieme}contrôle, Virginie a eu 13.
Déterminer la note x d'Elodie au 6^{ieme} contrôle sachant qu'elle a atteint la même moyenne que Virginie après six contrôles.

1 Voici la représentation graphique d'une fonction f, répondre aux questions suivantes :



a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Quelles sont les images de 4, 0, 7 et −2 ?

c) Donner une valeur approchée de f(−3), f(−1) et f(2).

d) Quels sont les antécédants de 0, 1, −3 et −4 ?

e) Sur quels intervalles f est-t-elle croissante ? décroissante ?

f) Dresser le tableau de variation de f.

g) Quels sont les extrémum de f ? Pour quelles valeurs sont-ils atteints ?

h) Résoudre graphiquement les équations : f(x)=−2, f(x)=−1 et f(x)=−4.

i) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq$-2

j) Dresser le tableau de signes de f.

2 a) Tracer une représentation graphique des fonctions f et g dont voici le tableau de variation :

x	−4		−1		0		3		5
f(x)	0	↘	−2	↗	1	↘	0	↗	2

x	−2		0		1		3
g(x)	0	↗	2	↗	3	↘	−2

b) Résoudre graphiquement l'équation : f(x)=0.

c)Comparer g(−1) et g(1) f(2) et 0 f(−3) et f(4).

3 Soit f la fonction à variable réelle définie par : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - 3$

a) Calculer les images de -3 et de $\sqrt{2} - 1$.

b) Déterminer les antécédants de 5 ; 3 ; 0 et -4.

c) Calculer les images des entiers compris entre -3 et 3 puis tracer la représentation graphique de f.

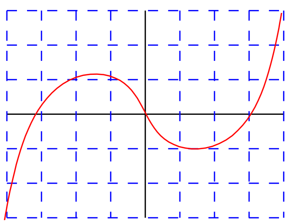
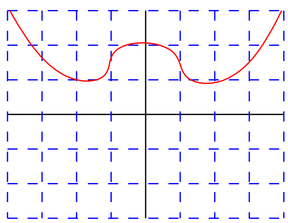
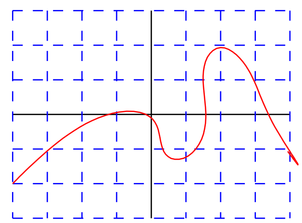
4 On sait que la fonction f est croissante sur $[-3\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;5]$. On a f(-3)=2 ; f(0)=4 et f(5)=-2.

a) Dresser le tableau de variationde f.

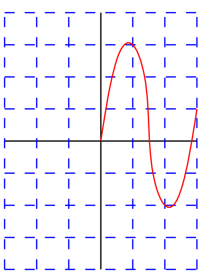
b) Compléter par $<$ ou $>$.

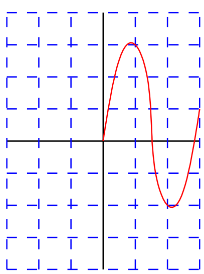
• -2 $< x <$-0,5 alors f(-2) ..... f(x) ..... f(-0,5) • 1 $< x <$ 2 alors f(1) ..... f(x) .....f(2)
• $x > 3$ alors f(x) ..... f(3)
• $x \in [-3\,;0]$ alors 2 .....f(x) .....4.

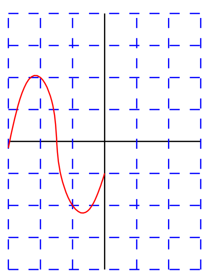
5 a) Les fonctions dont voici une représentation graphique sont-elles paires ou impaires ?

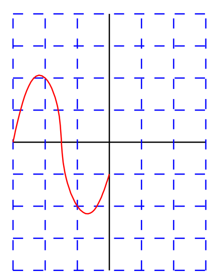




b) Compléter les représentations graphiques suivantes pour qu'elles définissent des fonctions paires ou impaires.


f est paire


f est impaire


f est paire


f est impaire

6 Les fonctions suivantes sont$-$elles paires ? impaires ?

$f(x) = 2x^2$-3 $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad h(x) = 3x^3$-$2x$

$i(x) = \dfrac{x}{x^2+4} \quad j(x) = 2x^2$-$3x + 1 \quad k(x) = \dfrac{5}{8}$

7 Soit ABED un trapèze rectangle en A de bases [AB] et [DE] tel que DE=6 cm, AD=3 cm et AB=2 cm.
Soit C un point du segment [DE]. On note CE=x.
Soit f(x) l'aire de ABCD, g(x) l'aire de BCE, h(x) le périmètre de ABCD et k(x) le périmètre de BCE.

1°) Dans quel intervalle le nombre x peut-il varier ?

2°) Tracer deux figures, l'une pour x=1, l'autre pour x=4.

3°) Calculer les images de 1 et de 4 pour chacune des fonctions f, g, h et k.

4°) Exprimer en fonction de x, f(x), g(x), h(x) et k(x).

5°) Pour quelle valeur de x les aires de ABCD et de BCE sont$-$elles égales ?

6°) Pour quelle valeur de x les périmètres de ABCD et de BCE sont-ils égaux ?

8 Dans cet exercice, f(x) est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f.

a) f(x) $= 2x^2 + 1$

b) f(x) $= \dfrac{1}{2x} + 3x$

c) f(x) $= \dfrac{1}{x-1}$

d) f(x) $= 22\sqrt{x} + 1$

e) f(x) $= \dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$

f) f(x) $= \dfrac{x}{(x-1)^2}$

g) f(x) $= \dfrac{-2x}{x^2+1}$

h) f(x) $= \dfrac{x}{x^2-1}$

9 Pour chaque fonction de l'exercice précédent, déterminer lorsque c'est possible les images des nombres suivants :

$0 \ ; 1 \ ; \dfrac{1}{2} \ ; -\sqrt{2} ; -4$

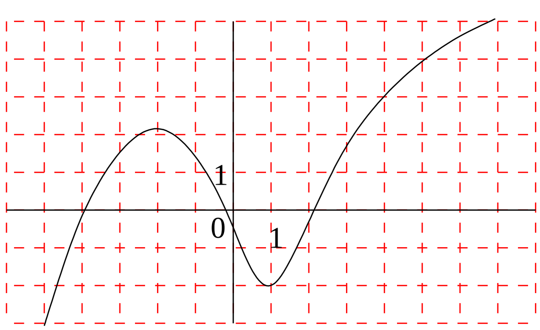
10 Soit f la fonction représentée ci-contre.

1°) Donner l'ensemble de définition.

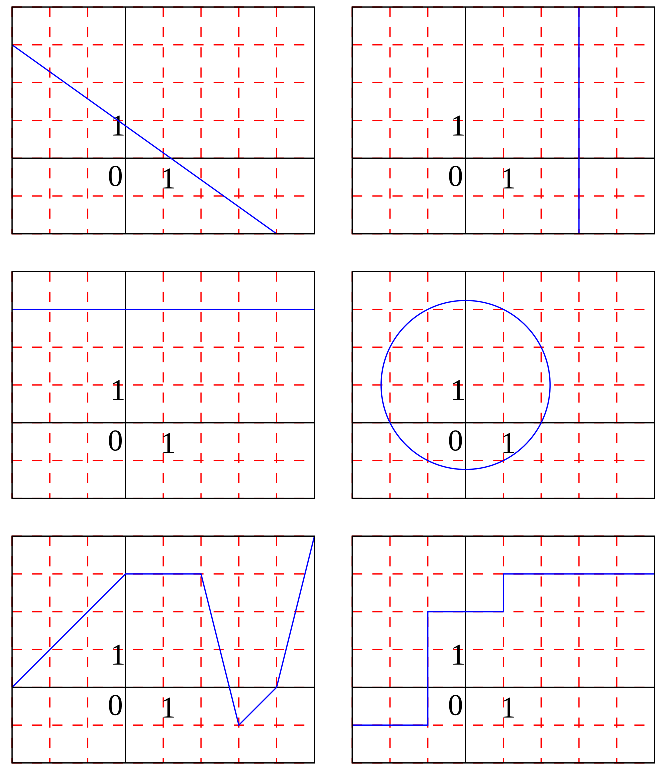
2°) a) Lire l'image de 3 par f ;
Calculer f(1) ; f(−4) ; $f(-2)$ et f(5).

b) Lire les antécédents de −3 par f.

c) Lire les antécédents de 0 par f.



11 Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction et, dans ce cas, préciser son ensemble de définition.



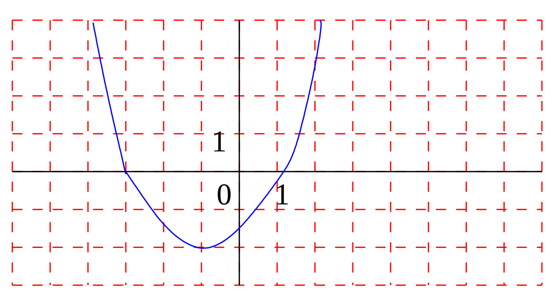
12 La courbe C ci-contre représente dans ce repère une fonction f définie sur [−2 ; 4] par f(x) $= 0,5(x+1)^2 - 2$.

1°) A l'aide du graphique, dire si chacun des points suivants appartient ou non à la courbe C :

A(0 ;−1, 5) ; B(1 ; 0) ; C(2 ; 2) ; D(−3 ; 0) ; E(1,5 ; 1) ; F(−1 ; -2)

2°) Déterminer par le calcul l'image de 0, de -1 et de $\sqrt{2}$. Retrouver les résultats sur la courbe.

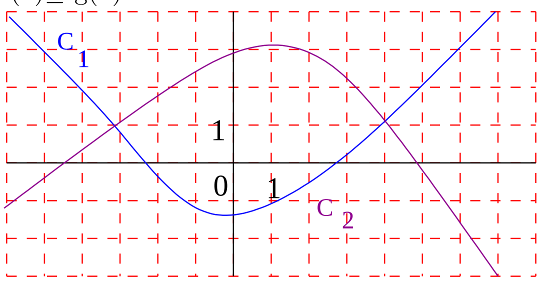
3°) Déterminer par le calcul les antécédents de 0, −3 et −2. Retrouver les résultats sur la courbe.



13 Deux fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[-5\,;\,3]$. C_1 est la courbe représentative de f et C_2 celle de g.

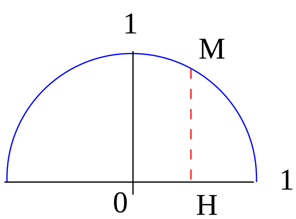
1°) Quel est l'ensemble des réels x pour lesquels C_1 est au-dessus de C_2 ?

2°) Quels sont les réels pour lesquels f(x) = g(x) ? f(x)$\leq$ g(x) ?



14 $(O; \vec{i}\,; \vec{i}\,)$ est un repère orthonormal.

C est le demi-cercle de centre O et de rayon 1.



1°) a) La courbe C est-elle la représentation graphique d'une fonction f ?

b) Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

2°) M est le point du demi-cercle C d'abscisse $\frac{1}{2}$.

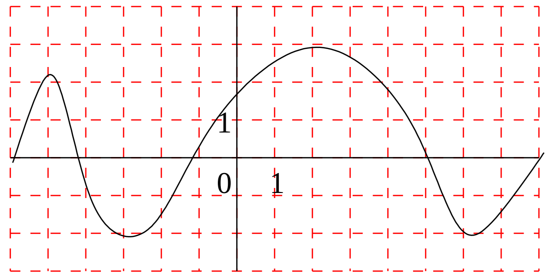
Calculer l'ordonnée de M. En déduire f($\frac{1}{2}$).

3°) De la même manière, calculer : f($-\frac{1}{2}$) ; f($\frac{2}{5}$) ; f$\frac{\sqrt{2}}{2}$) ; f(0).

4°) Trouver les réels x de l'intervalle $[-1\,;1]$ qui ont pour image par f : 0 ; $\frac{1}{1}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$v 5°) x est un réel de l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et M le point de C d'abscisse x. Calculer l'ordonnée de M en fonction de x. En déduire l'expression de f(x).

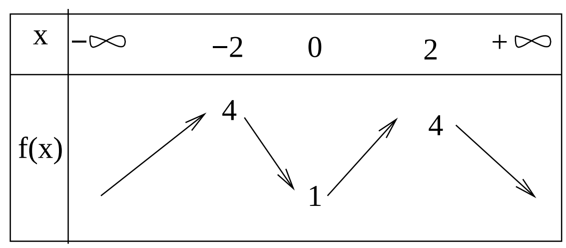
15 La fonction est donnée par sa courbe.

Dresser son tableau de variation.



16 Tracer une courbe susceptible de représenter f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

a) Df =$\mathbb{R}$; f(−4) =−3 ; f(1) = 3 ;f(4) = 2.



17 La courbe C ci-dessous est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (on précise de plus que f(3,5) = 0.

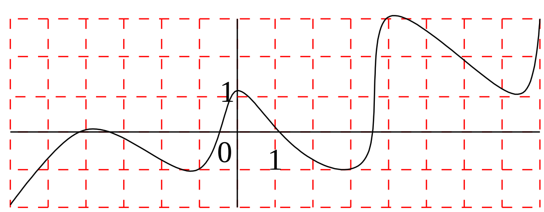
1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°) Résoudre graphiquement les inéquations

f(x) > 0 et f(x) < 0.

En déduire le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3°) Résoudre graphiquement f(x) $\geq$2.



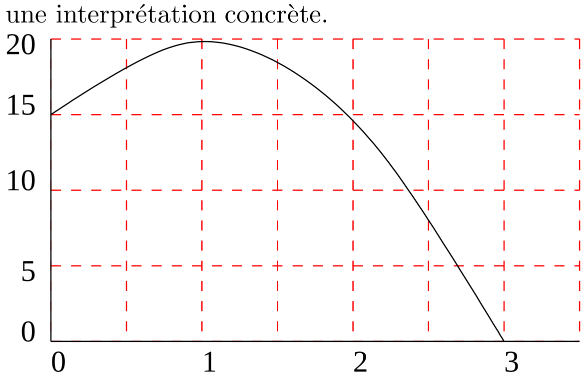
18 La trajectoire d'une balle de jeu est donné par : f(x) $= -5x^2 + 10x + 15$. où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air, exprimé en secondes, avec x$\in$ [0 ; 3] , et f(x) est la hauteur de la balle au dessus du sol, exprimée en mètres.

1°) Interpréter f(0) et f(3).

2°) a) D'après le graphique, quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?

b) Donner les instants où la hauteur est égale à 15 m.

c) Résoudre graphiquement f(x)$\geq$ 18. En donner une interprétation concrète.



19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) $= -2 + (x+1)^2$.

1°) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout réel, f(x)≥ -2 ?

2°) Avant d'affirmer que -2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, il faut démontrer que f(x) prend effectivement la valeur -2. Le démontrer et conclure.

20 ABC est un triangle isocèle en A avec : AB = AC = 10 cm.

H est le pied de la hauteur issue de A.

On se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle lorsqu'on fait varier la longueur x (en cm) du côté [BC].

1°) a) Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC lorsque x = 5, puis lorsque x = 10.

b) Peut-on avoir x = 30 ? Pourquoi ? Dans quel intervalle varie x ?

2. a) Exprimer AH en fonction de x.

b) On désigne par f(x) l'aire de ABC. Démontrer que : f(x) $=\frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.

c) Calculer f(x) pour chacune des valeurs entières de x prises dans [0 ; 20] : arrondir les résultats au dixième et les présenter dans un tableau.

d) Dans un repère orthogonal bien choisi, placer les points de coordonnées (x ; f(x)) du tableau précédent. Donner alors l'allure de la courbe représentant f.

21 ABCD est un trapèze rectangle de base AD = 6 cm, CB = 2 cm, de hauteur AB = 4 cm. H est le projeté orthogonal de C sur [AD]. Un point M décrit le segment [AB] et on pose AM = x.

La parallèle à (AD) passant par M coupe [CD] en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe [AD] en P.

1°) a) Démontrer que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.

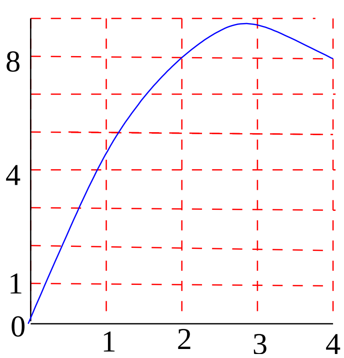
b) Démontrer que AMNP est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.

2°) On appelle f(x) l'aire du rectangle AMNP lorsque x décrit l'intervalle [0 ; 4].

a) Montrer que f(x) = $x(6-x)$ et vérifier que f(x) =$9-(x-3)^2$.

b) Compléter le tableau suivant :

longueur AM= x	0	1	2	2,5	3	4
aire de AMNP, f(x)						



3°) Le graphique ci-contre est la courbe représentative de la fonction f :x→ f(x) sur l'intervalle [0 ; 4].

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Lorsque AM =$\frac{1}{4}$ AD, quelle est l'aire de AMNP ?

b) Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?

c) Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm^2 ?

d) Vérifier qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\frac{17}{2}$ cm^2.

4°) Répondre aux questions suivantes en choisissant pour f(x) l'expression la mieux adaptée.

a) Démontrer que f(x)$\leq$ 9.

Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximale lorsque x = 3 ? Quelle est la nature de AMNP lorsque x = 3 ?

b) Démontrer que l'aire du rectangle AMNP est égale à $\frac{17}{2}$ lorsque x =$\frac{6-\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$.

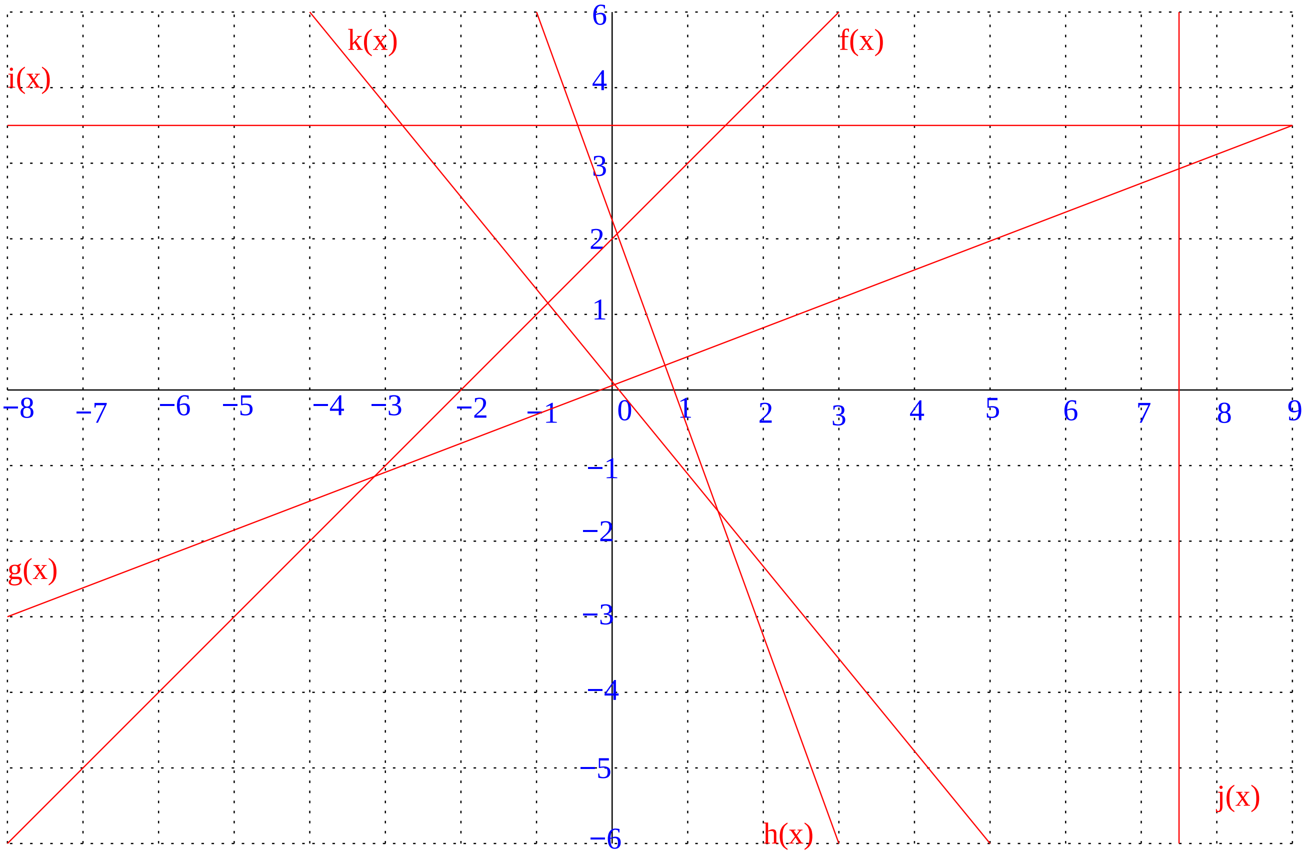
1 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ?

$f(x) = 2 - 3x$	$f(x) = \sqrt{2}x + 1$
$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$	$f(x) = 2\sqrt{x} + 1$
$f(x) = 2x^2 - 3$	$f(x) = -4x$
$f(x) = 2$	$f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2$

2 Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$f(x) = 3x - 2$	$g(x) = -\frac{4}{3}x + 3$
$h(x) = \frac{2}{3}x$	$i(x) = 3$
$j(x) = 1 - 2x$	$k(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

3 a) Par lecture graphique, déterminer l'expression des fonctions f, g, h, i, j et k.
b) Indiquer si ces fonctions sont croissantes, décroissantes ou constantes.
c) Résoudre graphiquement les équations : $f(x) = g(x)$ et $g(x) \leq j(x)$.



4 Déterminer les fonctions affines définie par :

a) f(2)=1 et f(3)=5

b) f(-2)=−3 et f(4)=1

c) f(0)=4 et f(−3)=-2

d) f(2)=3 et f(3)=3

5 1°) Tracer les représentations graphiques des fonctions $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = 5 - x$.

2°) Résoudre graphiquement l'équation :
$f(x) = g(x)$. Vérifier par le calcul.

3°) Résoudre graphiquement l'inéquation :
$f(x) > g(x)$. Vérifier par le calcul.

6 1°) Tracer un triangle ABC isocèle en A sachant que AB=AC=5 cm et AH=4 cm où H le pied de la hauteur issue de A.

2°) Soit K un point du segment [AH]. On pose KH= x.

La parallèle à la droite (BC) passant par K coupe respectivement les droites (AB) et (AC) en I et J.

Calculer en fonction de x les longueurs BI, IJ et JC.

3°) On note f(x) la mesure du périmètre du quadrilatère BIJC.

a) Expliciter f(x).

b) Tracer dans un repère orthogonal la représentation graphique de la fonction f.

c) Donner un encadrement de x. En déduire un encadrement de f(x).

d) Répondre graphiquement aux questions suivantes :

• Où se trouve le point K du segment [AH] lorsque le périmètre du quadrilatère BIJC mesure 14,5 cm ?

• Combien mesure le périmètre du quadrilatère BIJC lorsque le point K est le milieu du segment [AH] ?

7 Trois trains partent simultanément à minuit des trois villes suivantes : Alphaville, Bétaville et Gammaville.

Dans la suite du problème, ces villes seront respectivement désignées par les lettres A, B et G. Sur une carte très détaillée (à l'échelle 1/2 000 000), on remarque que :

• les 3 villes A, B et G sont alignées ;

• les 3 voies ferrées sont des segments de droite ;

• Bétaville est située entre Alphaville et Gammaville ;

• AB=7,2 cm et BG=36 cm.

Le train T_1 part de Alphaville et se dirige vers Gammaville à la vitesse constante de 120 km/h.

Le train T_2 part de Bétaville et se dirige vers Gammaville à la vitesse constante de 160 km/h.

Enfin, le train T_3 part de Gammaville et se dirige vers Alphaville à la vitesse constante de 216 km/h.

1°) Calculer en kilomètres les longueurs des voies ferrées entre A et B, puis entre B et G, enfin entre A et G.

2°) On désigne par $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ les distances en kilomètres séparant respectivement les trains T_1, T_2 et T_3 d'Alphaville à l'heure t en minutes.

Exprimer $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ en fonction de t.

3°) Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont les suivantes :

• 1 cm sur l'axe des abscisses correspond à 32 km.

• 1 cm sur l'axe des ordonnées correspond à un quart d'heure.

Représenter dans ce repère les trois fonctions x_1, x_2 et x_3.

4°) A partir de ces graphes, répondre aux questions suivantes (vous indiquerez éventuellement les meilleures valeurs approchées possibles) :

a) A quelle heure le train T_1 passe-t-il en gare de Lambaville, située à 16 km après Bétaville ?

b) A quelle heure le train T_3 passe-t-il en gare de Centreville, situé à égale distance de B et de G ?

c) Entre quels instants le train T_3 est-il situé entre les trains T_1 et T_2 ?

5°) En effectuant des calculs appropriés répondre avec éventuellement plus de précision aux questions du 4°).

Devoir n°1

I

ABCD est un rectangle et O est un point fixé à l'intérieur de ce rectangle.

Le but du problème est de déterminer la position des points M_1 etM_2 sur le pourtour du rectangle ABCD de manière à obtenir trois domaines de même aire.

Un point M se déplace sur les côtés du rectangle.

L'unité de longueur est le centimètre.

AB = 5 et BC = 3. On note x la distance entre A et M en parcourant le rectangle dans le sens ABCD.

On appelle f(x) l'aire de la partie hachurée.

1°) Donner un encadrement de x lorsque M $\in$ [AB], M $\in$ [BC], M $\in$[CD] et M $\in$[DA].

2°) Quelles valeurs peut prendre x ?

3°) Déterminer f(x) dans les cas suivants :

a) M $\in$ [AB]

b) M $\in$ [BC]

(indication : aire(AOMB) = aire(AOB) + aire(OBM))

c) M $\in$ [CD] (méthode similaire à la précédente)

d) M $\in$ [DA]

4°) Représenter graphiquement cette fonction.

5°) Résoudre graphiquement le problème.

II

ABCD est un parallélogramme tel que : AB = 7,5 ; AD = 4,5 et $\widehat{BDA}$= 90°.

Soit M un point libre du segment [AB]. On pose AM = x, avec x $\in$ [0 ; 7 ,5].

La parallèle à la droite (DB) passant par M coupe le segment [AD] en N.

On cherche la position du point M afin que le triangle CMN, de base [MN], ait une hauteur de longueur égale à la longueur de cette base.

1°) a) Faire une figure à l'échelle, unité 1 cm.

Tracer la hauteur [CH] relative à la base [MN]. Quelle est la nature du quadrilatère BDNH ?

b) Calculer BD.

2°) a) Exprimer MN en fonction de x. On nommera MN = f(x).

b) Exprimer CH en fonction de x. On nommera CH = g(x).

3°) a) Représenter dans un même repère orthonormal, les fonctions f et g.

b) Donner une valeur approchée de x tel que MN = CH.

4°) Résoudre algébriquement f(x) = g(x). Donner la valeur exacte de AM répondant au problème posé. Calculer alors l'aire du triangle CMN.

Devoir n°2

I f est une fonction affine telle que f(2) = 1 et f(−3) = 4.

1°) Exprimer f(x) en fonction de x.

2°) Sans effectuer la représentation graphique de la fonction f, donner, en justifiant, le sens de variation de f.

3°) Calculer f($-\frac{1}{2}$.

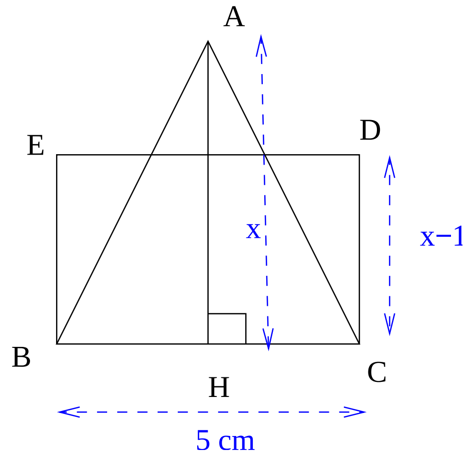
4°) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq -2$.

II Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 4 < (x-2)(3x+5)$

b) $\dfrac{x^2+1)(3x-1)}{5x+3} \geq 0$

III



L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire est le cm^2.

ABC est un triangle isocèle en A tel que BC = 5.

H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose AH = x.

BCDE est un rectangle tel que BC = 5 et EB =$x-1$

1°) Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du triangle ABC et l'aire g(x) du rectangle BCDE.

2°) Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonction f et g. (les calculs devront figurer sur la copie.)

3°) Trouver la hauteur AH pour laquelle le triangle ABC et le rectangle BCDE ont la même aire.

On traitera cette question graphiquement et algébriquement.

1

compléter :

Si $0 \leq a < b$ alors a^2.....b^2 car ....

Si $a < b \leq 0$ alors a^2......b^2 car ....

Si $x \leq -2$ alors x^2.....

Si $x \geq 3$ alors x^2 ....

Si $0 \leq x-2 \leq y-2$ alors $(x-2)^2$.....$(y-2)^2$

Si $a+1 \leq b+1 \leq 0$ alors $(a+1)^2$......$(b+1)^2$

Si $x \leq y$ alors $-2x$....... $-2y$

2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 1$.

1°) Quelle est la parité de f ?

2°) Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

3°) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

4°) Dresser le tableau de variation de f.

5°) Quel est le minimum de f ?

6°) Quels sont les antécédants de 2 par f ?

7°) Calculer $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.

8°) Tracer la courbe de f.

3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x-1)^2 + 2$.

1°) f est-elle paire ou impaire ?

2°) Montrer que f est décroissante sur $[1; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 1]$.

3°) Tracer la représentation graphique de f après avoir calculé les images de 1 ; 1,5 ; 2 ; 3 ; 4 ; 0,5 ; 0 ; -1 et -2.

4°) f admet-elle des extrémas ?

5°) Quel est l'axe de symétrie de la fonction f ?

6°) Résoudre les équations $f(x) = -4$ et $f(x) = 4$.

7°) Résoudre graphiquement $f(x) = x - 1$ et $f(x) \geq x - 1$.

4

Tracer la courbe de la fonction : $x \mapsto x^2$.

Résoudre graphiquement :

$x^2 = 4$	$x^2 = 9$	$x^2 = 0$
$x^2 = -2$	$x^2 \leq 4$	$x^2 \geq 9$
$x^2 \geq 0$	$x^2 \leq -2$	$(x-2)^2 = 1$
$(x-2)^2 \geq 1$	$(x-2)^2 \leq 1$	$1 \leq x^2 \leq 4$
$1 \leq (x+3)^2 \leq 4$	$(x-5)^2 \leq 0$	

5

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

Déterminer a et b tels que $f(x) = (x-a)^2 + b$.

6

Ecrire sous forme canonique :

$f(x) = x^2 + 4x + 2$	$g(x) = x^2 + 8x + 5$
$h(x) = x^2 - 5x + 6$	$i(x) = 2x^2 - 8x + 4$
$j(x) = -3x^2 + 9x - 4$	$k(x) = 25x^2 - 10x + 1$

7

Tracer les courbes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$.

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

b) En déduire les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$.

8

a) Résoudre l'inéquation $(x+2)^2 \leq 2x + 4$.

b) Tracer les courbes des fonctions $f :\ x \ \mapsto (x+2)^2$ et $g : \mapsto 2x + 4$.

c) Retrouver graphiquement les solutions de l'inéquation : $(x+2)^2 \leq 2x + 4$.

Fonctions inverses

9 Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, tracer la courbe de la fonction : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

a) Quel est son tableau de variation ?

b) Résoudre graphiquement :
$f(x) = 2x + 1$.

$f(x) \leq 2x + 1$

c) Compléter :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a}.....\frac{1}{b}$

Si $a \leq b < 0$ alors $\frac{1}{a}.....\frac{1}{b}$.

Si $0 < x - 2 < y - 2$ alors $\frac{1}{x-2}.....\frac{1}{y-2}$

10 Soit la fonction $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x-1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Soit $1 < a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$. Que peut-on en déduire ?

c) Si $a < b < 1$, comparer $f(a)$ et $f(b)$. Que peut-on en déduire ?

d) Tracer le tableau de variation de f.

e) Calculer les images de 1,1 ; 1.25 ; 1,5 ; 2 ; 3 ; 4 ; 0,9 ; 0,75 ; 0,5 ; 0 ; -1 ; -2 ; -3 puis tracer la courbe de f.

f) Résoudre graphiquement l'équation :
$2 + \frac{1}{x-1} = 5$

g) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) \leq 5$.

h) Quel est le centre de symétrie de la courbe de f ?

11 Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{2x-3}{x+5}$.

Déterminer a et b tels que $g(x) = a + \frac{b}{x-5}$.

12 1°) Soit la fonction f définie par $f(x) = -(x-2)^2 + 3$.

a) Montrer que f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty; 2]$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Quel est le maximum de f ?

e) Tracer la courbe de f.
2°) Soit la fonction g définie par
$g(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Montrer que g est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et sur $[2; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Tracer la courbe de g dans le même repère que celle de f
3°) Résoudre graphiquement :

$f(x) = 0 \qquad f(x) \geq 2 \qquad f(x) = g(x)$

$g(x) = 0 \qquad g(x) \geq 2 \qquad f(x) \geq g(x)$

13 Tracer les courbes des fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto 3x - 1$.

Résoudre graphiquement : $f(x) = g(x)$ puis $f(x) \geq g(x)$.

14 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x-3}{x-1}$.

a) Déterminer a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$.

b) En déduire les variations de f.

Autres fonctions

15 Compléter :

Si $a \leq b$ alors $a^3.....b^3$ car ....

Si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a}.....\sqrt{b}$ car ....

Si $0 \leq a \leq b$ alors $|a|.....|b|$ car ....

Si $a \leq b \leq 0$ alors $|a|.....|b|$ car ....

16 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$f(x) = \sqrt{2-x}$ et $g(x) = \sqrt{\frac{4-9x^2}{x}}$

17 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1}+2$.

1°) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

2°) Montrer que f est croissante sur D_f.

3°) Tracer la courbe de f.

4°) Résoudre graphiquement puis par le calcul :

$f(x) = 3$ et $f(x) = 0$.

18 Compléter :

Si $a \geq 0$ alors $|a| =$ .....

Si $a \leq 0$ alors $|a| =$ .....

Si $a-3 \geq 0$ c'est-à-dire si $a \geq$ .... alors $|a-2| =$ ....

Si $a-3 \leq 0$ c'est-à-dire si $a \geq$ .... alors $|a-2| =$ ....

Si $-3x+2 \geq 0$ c'est-à-dire x............. alors $|-3x+2| =$ ....

Si $-3x+2 \leq 0$ c'est-à-dire x............. alors $|-3x+2| =$ ....

19 Soit la fonction $f : x \mapsto |2x-5|-3$

a) Ecrire f(x) sans barre de valeurs absolues quand $x \geq \frac{5}{2}$ et quand $x \leq \frac{5}{2}$.

b) Tracer la courbe de f.

c) Résoudre graphiquement l'équation f(x)=0.

Tracer le tableau de variation de f. Quel est le minimum de f ? Pour quelle valeur est-il atteint ?

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$.

1°) Compléter les tableaux suivant :

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
f(x)		0,016		0,42		1,95		5,56	

x	-1	$-0,5$	0	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5
g(x)	-2	0,375		0,5			$-0,125$	1	2,5

2°) Tracer la courbe de f sur [0 ;2].

3°) Tracer la courbe de g sur $[-1; 2,5]$.

4°) Tracer le tableau de variation de g. Admet-il un extrémum ?

5°) Déterminer une valeur approchée des antécédants de -3 par g.

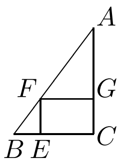
6°) Résoudre graphiquement l'équation f(x)=g(x). Retrouver ce résultat par le calcul.

8°) Résoudre graphiquement puis par le calcul $g(x) \geq 1$.

8°) Déterminer en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation g(x)=m.

Devoir n°1

Soit ABC un triangle rectangle en C avec $AB = 10$ cm et $BC = 6$ cm. Soit E un point de $[BC]$ tel que $BE = x$. $EFGC$ est un rectangle.



1°) Calculer AC.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

b) Exprimer EC en fonction de x.

c) Exprimer EF en fonction de x.

d) Pour quelle valeur de x le rectangle $EFGC$ est-il un carré ?

2°) a) Calculer en fonction de x le périmètre $P(x)$ du rectangle $EFGC$.

b) Pour quelle valeur de x a-t-on $P(x) = 13$?

3°) a) Montrer que l'aire du rectangle $EFGC$ est donnée par :

$$A(x) = \frac{4}{3}x(6 - x)$$

b) Calculer $A(0)$ et $A(6)$. Vérifier géométriquement ce résultat.

c) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$A(x)$													

d) Représenter graphiquement la fonction A dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

e) Résoudre graphiquement $A(x) = 9$.

f) Déterminer à l'aide du graphique le maximum de la fonction A et donner la valeur de x correspondante.

4°) a) Montrer que :

$$A(x) = -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 12$$

b) En déduire par le calcul le maximum de la fonction A et donner la valeur de x correspondante.

c) Etudier (par le calcul !) les variations de A sur $[0; 3]$ et sur $[3; 6]$.

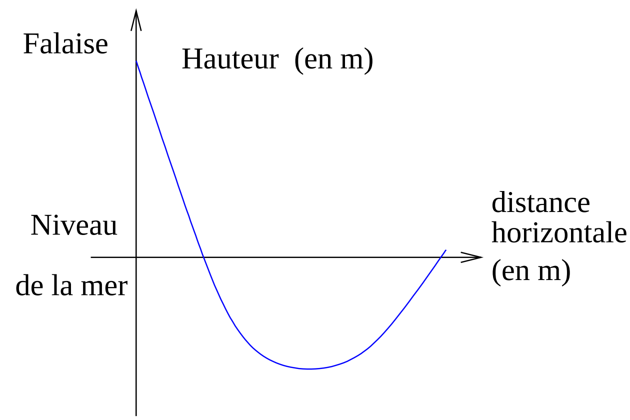
d) Donner dans chaque cas un encadrement de $A(x)$ en justifiant et en utilisant les résultats de la question précédente.

- $1 \leq x \leq 2$
- $4 \leq x \leq 5$

Devoir n°2

I

Un oiseau se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis une falaise. Soit $h(x)$ la hauteur de l'oiseau au dessus du niveau de l'eau en fonction de la distance x, à l'horizontale, le séparant de la rive.
L'oiseau décrit une parabole et on trouve :
$h(x) = x^2 - 6x + 5$ pour x appartenant à $[0; 6]$.



Partie A

1. A quelle hauteur l'oiseau a-t-il commencé son plongeon ? Justifier.
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6
$h(x)$									

3. Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthogonal.
4. Indiquer graphiquement :
   (a) le sens de variation de h,
   (b) à quelle distance de la rive la hauteur de l'oiseau est minimale.

Partie B

1. Montrer que $h(x) = (x-3)^2 - 4$.
2. Étudier les variations de h sur $]-\infty; 3]$ puis sur $[3; +\infty[$.
3. Donner dans chaque cas un encadrement de $h(x)$ en justifiant votre réponse :
   (a) $1,5 \leq x \leq 2$
   (b) $3 \leq x \leq 4$.
4. Étudier l'extremum de h sur $\mathbf{R}$.
5. En déduire le tableau de variations complet de h sur $[0; 6]$.
6. Écrire l'équation qui permet de déterminer à quelles distances l'oiseau est entré puis sorti de l'eau.
   Résoudre cette équation.
   Indiquer comment on retrouve ce résultat graphiquement.
7. Trouver par le calcul les solutions de $h(x) < 0$.

II

1. Résoudre : $(3-2x)(4x+1) \leq 0$
2. Résoudre :
$$\frac{(x-1)(x+1)}{(3-x)} \leq 0$$
3. Donner tous les nombres *entiers* vérifiant : $\begin{cases} -x+1 \leq & 2x+18 \\ 4x-7 \leq & 2x+2 \end{cases}$

Angles orientés et trigonométrie

Exercice n°1

Sur le cercle trigonométrique de centre O, placer dans chaque cas, deux points A et B tels que la mesure principale de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ soit :

$-\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$

Exercice n°2

Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle :

$\frac{5\pi}{3}$ $-\frac{40\pi}{3}$ $\frac{35\pi}{6}$ $\frac{21\pi}{4}$ $\frac{53\pi}{2}$ $-\frac{13\pi}{7}$

Exercice n°3

C est le cercle trigonométrique de centre O et A est un point de C. Dans chaque cas, placer le point M tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ soit :

$\frac{7\pi}{2}$ $\frac{23\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{47\pi}{3}$ $\frac{1308\pi}{2}$ $-\frac{33\pi}{4}$ $\frac{67\pi}{5}$ $-\frac{65\pi}{7}$

Exercice n°4

Exprimer les mesures d'angles en radians puis déterminer une mesure principale pour :

820° -231° -205 gr 312 gr

Exercice n°7

Tracer un hexagone régulier ABCDEF de centre O. Donner, en radians, la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})$ $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF})$ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

Formules de trigonométrie

Valeur des angles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sin\ x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tan\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*interdit*	0

Formulaire

$cos(t+2k\pi) = cos\ t$ $sin(t+2k\pi) = sin\ t$	$cos(-t) = cos\ t$ $sin(-t) = -sin\ t$	$cos(\pi+t) = -cos\ t$ $sin(\pi+t) = -sin\ t$
$cos(\pi-t) = -cos\ t$ $sin(\pi-t) = sin\ t$	$cos(\frac{\pi}{2}-t) = sin\ t$ $sin(\frac{\pi}{2}-t) = cos\ t$	$cos(\frac{\pi}{2}+t) = -sin\ t$ $sin(\frac{\pi}{2}+t) = cos\ t$

1 Construire deux triangles ABC non superposables de hauteur [AH] tels que AB= 8 cm ; AH=2 cm et HC=4 cm.
Calculer dans chaque cas, la longueur du segment [BC].

2 Soit ABC un triangle et H le pied de sa hauteur issue de A. On a BC=5 cm ; BH=1 cm et AH=2 cm.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

3 Soit ABC un triangle. B' et C' sont les milieux des côtés [AC] et [AB]. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
Démonter que la droite (B'C') est la médiatrice du segment [AH].

4 Deux cercles C et C' de centres respectifs O et O' sont sécants en A et B. Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle C et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle C'.
1°) Démontrer que les points E, B et F sont alignés.
2°) Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (OO').
3°) On a AO=3 cm ; AO'=4 cm et (AO)⊥(AO').
a) Calculer la longueur du segment [EF].
b) Calculer l'aire du triangle AEF. En déduire la longueur du segment [AB].

5 Soit ABCD un rectangle. Soit I le milieu du segment [CD], E le symétrique de B par rapport au point I et F le symétrique de C par rapport au point D.
1°) Démontrer que A, D et E sont alignés.
2°) Démontrer que ACEF est un losange.
3°) Sachant que AB= 4 cm et AD=2 cm, calculer l'aire du triangle BEC. En déduire la distance du point C à la droite (BC).

6 Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit M un point du segment [BC], H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) et B' le projeté orthogonal de B sur (AC).
Démontrer, en calculant les aires des triangles ABM et ACM, que MH+MK=BB'.

7 Soit ABC un triangle et H son orthocentre.
1°) Déterminer les orthocentres des triangles ABH, BCH et CAH.
2°) Quelle remarque peut-on faire quand ABC est rectangle en A ?

8 Soit ABCD un trapèze tel que AB=4 cm, (AB)//(CD). E et F sont les projetés orthogonaux de A et de B sur la droite (CD) ; ABFE est un carré. AED est un triangle rectangle isocèle. BFC est un triangle rectangle en F avec $\widehat{FCB}$=60°.
1°) Calculer les longueurs des diagonales [AC] et [BD].
2°) Soit I le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD]. Calculer $\frac{IA}{IC}$ et $\frac{IB}{ID}$.
3°) Calculer les longueurs IA, IC, IB et ID.

9 Un triangle ABC rectangle en A est tel que BC=4,5 cm et AB=3,6 cm.
1°) Calculer la longueur AC.
2°) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). En écrivant $sin\widehat{B}$ de deux manières, calculer AH. En déduire BH et HC.
3°) Tracer la parallèle à (AB) passant par H. Elle coupe (AC) en E.
Calculer HE, AE et EC.
4°) La bissectrice de l'angle $\widehat{BHA}$ coupe (AB) en D. Soient K et L les projetés orthogonaux, respectivement sur (AH) et (BH).
a) Montrer que DKLH est un carré. Soit a son côté.
b) En utilisant le théorème de Thalès, calculer a puis BD et AD.

10 ABC est un triangle et O un point du plan tel que (OA) coupe (BC) en D. Par D, on trace la parallèle à (OC) qui coupe (AC) en F et la parallèle à (OB) qui coupe (AB) en E.
Démontrer que (EF)//(BD).

11 ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O. Les parallèles menées par O à (BC) et (CD) coupent respectivement (AB) en M et (AD) en N.
Démontrer que (MN)//(BD).

12 Soit ABC un triangle. Construire à l'extérieur du triangle la carré BCDE. Les droites (AD) et (BC) se coupent en M. Les droites (AE) et (BC) se coupent en N. La droite passant par N et perpendiculaire à (BC) coupe la droite (AB) en P. La droite passant par M et perpendiculaire à (BC) coupe la droite (AC) en Q.
1°) Démontrer que (PQ)//(BC). Quelle est la nature de MNPQ ?
2°) Démontrer que PN=NM. Quele est la nature de MNPQ ?

13 Soit ABC un triangle. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. D est le milieu du segment [KJ].
1°) Démontrer que les points A, D, I sont alignés et que D est le milieu de [AI].
2°) Soit J' le point du segment [AC] tel que AJ'=$\frac{1}{3}$AC. K' est le point du segment [AB] tel que AK'=$\frac{1}{3}$AB. E est l'intersection des droites (AI) et (J'K').
Démontrer que le point E est le milieu du segment [J'K'].

14 Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu. A_1 est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). B_1 est le projeté orthogonal de B sur (AC). C_1 est le projeté orthogonal de C sur (AB). Le point A_1 se projette orthogonalement en M sur la droite (AB) et en N sur la droite (AC). Démontrer que (MN)//(B_1C_1).

15 Tracer un triangle ABC non rectangle et mener de B la perpendiculaire à (AB) et de C la perpendiculaire à (AC). Ces deux droites se coupent en D.
Montrer que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. (Indication : on considérera le cercle de diamètre [AD].)

16 ABCD est un parallélogramme de centre O. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
Les droites (DI) et (BL) se coupent en un point noté E. Les droites (BK) et (DJ) se coupent en un point noté F.
1°) Démontrer que les points A, E, O, F et C sont alignés.(Indication : on considérera les médianes des triangles ADB et DCB.)
2°) Démontrer que AE=EF=FC.

17 Soient ABC et A'BC deux triangles rectangles de même hypothénuse [BC]. Soit I le point d'intersection des droites (AC) et (A'B). La perpendiculaire à (BC) passant par I coupe la droite (AB) en J.
Montrer que les points C, A' et J sont alignés. (Indication : utiliser les hauteurs du triangle ICJ).

18 Soit ABCD un carré. Soit E le point intérieur au carré tel que ABE soit un triangle équilatéral. Soit F le point extérieur au carré tel que BCF soit un triangle équilatéral.
1°) Calculer les mesures des angles $\widehat{DEA}$, $\widehat{AEB}$ et $\widehat{BEF}$
2°) En déduire que les points D, E et F sont alignés.

19 Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle C. H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à B dans le cercle C.
1°) Déterminer 5 couples de droites perpendiculaires.
2°) En déduire que le quadrilatère AHCD est un parallélogramme.

20 Sur un cercle C de centre O, on marque deux points A et B tels que (OA) soit perpendiculaire à (OB).
Calculer l'angle $\widehat{AMB}$ lorsque M est un point du petit arc AB.

21 Sur un cercle de centre O et de rayon 4 cm, marquer trois points A, B et C tels que $\widehat{BAC}$=60°.
Calculer la longueur du petit arc d'extrémités A et B.

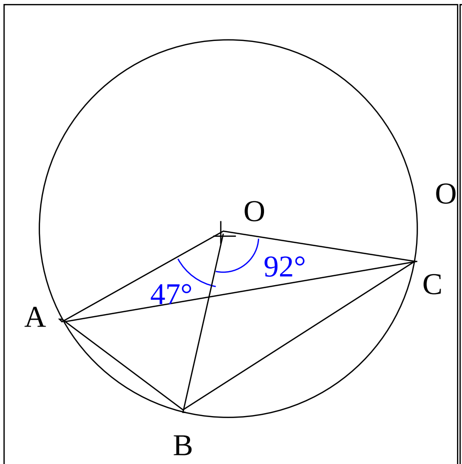


Figure 1

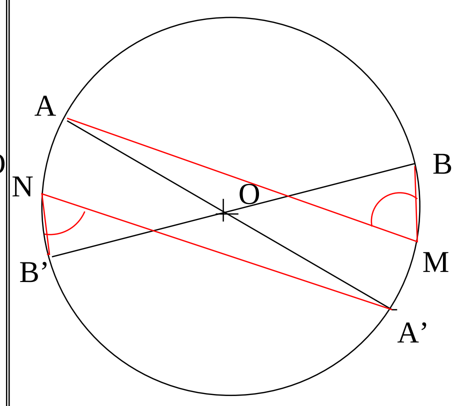


Figure 2

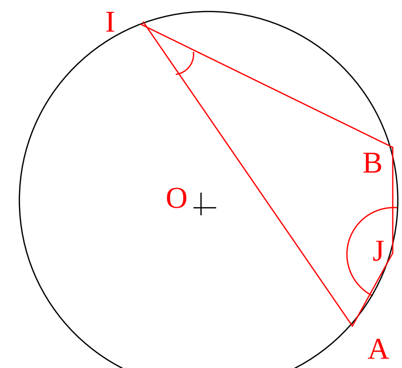


Figure 3

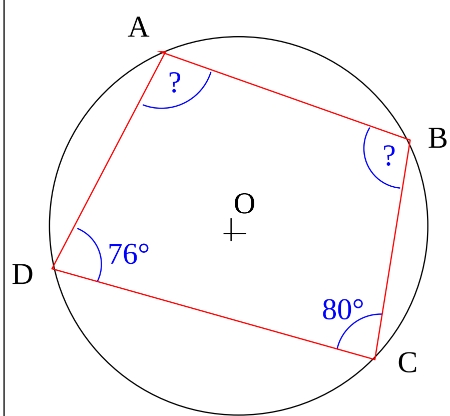


Figure 4

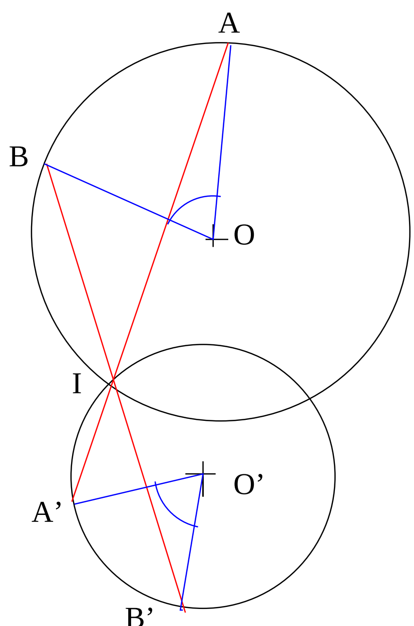


Figure 5

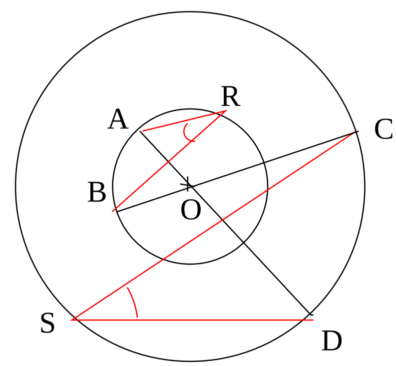


Figure 6

22 Pour la figure 1, calculer les angles du triangle ABC.

23 Pour la figure 2, montrer que $\widehat{AMB} = \widehat{A'N'B'}$.

24 Pour la figure 3, sachant que la distance AB est égale au rayon du cercle, calculer la mesure des angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AJB}$.

25 Pour la figure 4, calculer les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ABC}$.

26 Pour la figure 5, montrer que $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.

27 Pour la figure 6, on sait que les deux cercles sont concentriques. Montrer que $\widehat{ARB} = \widehat{CSD}$.

Devoir n°1

I Résoudre les équations suivantes :

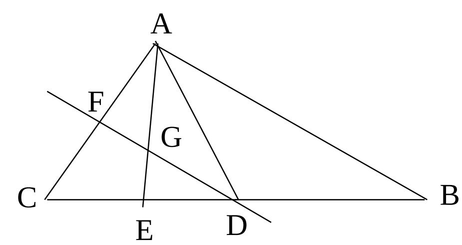
a) $x^2 - 2x + 1 - 2(x - 1) = 0$

b) $(3x + 2)^2 = 5$

II ABC est un triangle tel que BC = 2AC.

D est le milieu de [BC], E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [AC].

Les segments [AE] et [DF] se coupent au point G.



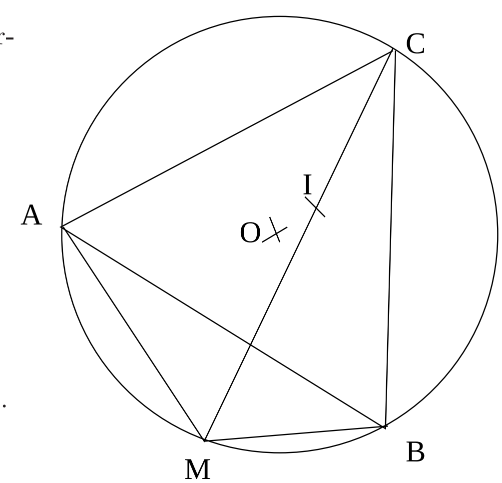
1°) . Démontrer que ACD est un triangle isocèle en C.

2°) Démontrer que(CG) est la médiane issue de C du triangle ACD.

3°) On admet que AE = DF.

Démontrer que AGD est un triangle isocèle en G.

III



Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.

M est un point quelconque du petit arc de cercle AB.

On considère le point I du segment [MC] tel que MI = MA.

Le but de l'exercice est de montrer que MA + MB = MC.

1°) Montrer que $\widehat{AMC} = \widehat{ABC}$

En déduire que le triangle MAI est équilatéral.

2°) A l'aide d'une rotation de centre A (à préciser), démontrer que MB = IC.

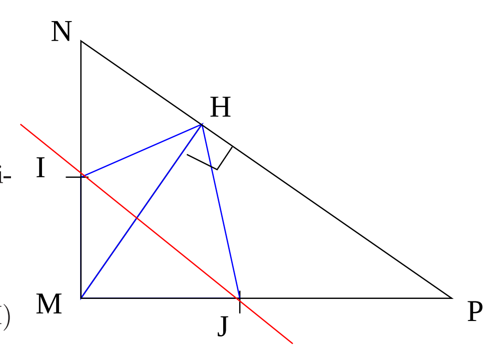
3°) Conclure.

IV

On considère le triangle MNP rectangle en M.

On trace la hauteur de ce triangle issue de M. Elle coupe [NP] en H.

I et J sont les milieux respectifs de [MN] et [MP].



1°) Montrer que les triangles MIH et MJH sont des triangles isocèles respectivement en I et en J.

2°) Montrer que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [MH].

3°) En utilisant une symétrie axiale (à préciser), montrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

1 Simplifier les expressions suivantes :

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ED}$.

2 Soient A, B, C et D quatre points.
Construire les points E, F et G tels que

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$.

3 Soit ABC un triangle. On pose $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$.

1°) Construire D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

2°) En utilisant la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FG}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Que peut-on en conclure ?

3°) Exprimer $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Que représente le point B pour le quadrilatère EDGF ?

4 On considère quatre points A, B, C et D non alignés.

1°) Construire M et N tels que :

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

2°) Démontrer que $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

5 Construire les points A, B, C, D, E et F tels que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$.

Démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$.

6 Soit un triangle ABC et M le milieu de [AC].

1°) Construire le point D symétrique de A par rapport à B.

2°) Construire le point E, image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3°) Montrer que E est le milieu de [DC].

7 Soit un triangle ABC. Construire les points D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$AF=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

8 Soit ABCD un parallélogramme.

Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ puis le point G tel que $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

Démontrer que $\overrightarrow{GF}=3\overrightarrow{DB}$.

9 Soient A et B deux points distincts.

A partir de chacune des relations vectorielles suivantes, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis placer le point M sur la droite (AB).

$\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{MA}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$.

10 Soit ABC un triangle.

Construire les points M, N et Q tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}$

$3\,\overrightarrow{QA} + 2\,\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$.

11 $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

On considère les points O, M et N tels que :

$\overrightarrow{OM} = 5\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{ON} = -\frac{15}{2}\overrightarrow{i} - \frac{21}{2}\overrightarrow{j}$.

Démontrer que les points O, M et N sont alignés.

12 Soit ABC un triangle. E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les points B, E et F sont alignés.

13 Soit ABC un triangle.

I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\,\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que (IC) et (BJ) sont parallèles.

14 Soit ABC un triangle.
Placer les points M, N et P tels que
$\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA}$

$\overrightarrow{PA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{PB}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) Montrer que M, N et P sont alignés.

15 Soit un triangle ABC
Placer les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

Montrer que $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$ et en déduire que les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.

16 Soit ABC un triangle.

Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

Montrer que C est le milieu de [AD].

17 Soit ABCD un parallélogramme, M et N les points définis par :

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

1°) Etablir les relations : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CN} = 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$.

2°) En déduire que les points C, M et N sont alignés.

18 Soit ABC un triangle.

1°) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{CA} + 3\,\overrightarrow{AB}$.

2°) Démontrer que B, C et D sont alignés.

19 Soit ABCD un parallélogramme.

Construire les points E, F, G et H tels que

$\overrightarrow{DE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$.

Montrer que EFGH est un parallélogramme.

20 Soit ABC un triangle, le point E tel que B soit le milieu de [EC], le point F milieu de [AC] et le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

1°) Montrer que :

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

2°) Montrer que E, F et G sont alignés.

21 Soit A, B et C trois points non alignés.

1°) Construire le point M tel que :

$5\ \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CM} + 3\ \overrightarrow{BM} = 2\ \overrightarrow{CA}$.

2°) Construire le point N tel que :

$\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

3°) Montrer que M, N et B sont alignés.

22 Soit ABC un triangle.

I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

On appelle centre de gravité du triangle ABC, le point G vérifiant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$.

b) Placer le point G.

c) Soit M un point quelconque du plan.

Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\ \overrightarrow{MG}$.

d) Montrer que G est aussi le centre de gravité du triangle IJK.

23 Soit un triangle ABC.

a) Placer le point D tel que :

$\overrightarrow{DA} + 2\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

b) Montrer que pour tout point M,

$\overrightarrow{MA} + 2\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\ \overrightarrow{MD}$.

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$||\overrightarrow{MA} + 2\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 16$.

d) Déterminer l'ensemble des points N tels que $||\overrightarrow{NA} + 2\ \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}|| = 4\ ||\overrightarrow{NC}||$.

24 On considère un triangle ABC rectangle en A.

On donne AB=5 ; AC=12 et G tel que :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

a) Calculer $||\overrightarrow{AG}||$.

b) Soit I le point défini par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

Construire I.

c) Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 6$.

Vecteurs et distances.

1 Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, placer les points A$(-3\,;-4)$; B$(3\,;2)$; C$(7\,;-2)$ et D$(1\,;-8)$.

1°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) Calculer d(A ;B) ; d(A ;C) et d(B ;C).

En déduire que ABC est un triangle rectangle.

3°) Calculer $\overrightarrow{DC}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

4°) Calculer les coordonnées du centre M de ABCD.

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, placer les points A$(-2\,;1)$; B$(3\,;2)$ et C$(-4;-4)$.

a) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

b) Déterminer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MC}$.

3 Dans chaque cas, est-ce que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

a) $\vec{u}(3;-4)$ et $\vec{v}(-\frac{6}{5};\frac{8}{5})$

b) $\vec{u}(5;-1)$ et $\vec{v}(4;2)$

c) $\vec{u}=8\vec{i}+6\vec{j}$ et $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

4 Déterminer x de façon que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$

b) $\vec{u}(\frac{1}{2}:\frac{2}{5})$ et $\vec{v}(-1;x-2)$

5 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit les points A$(-1;0)$; B$(-4;-1)$ et C$(5\,;2)$.

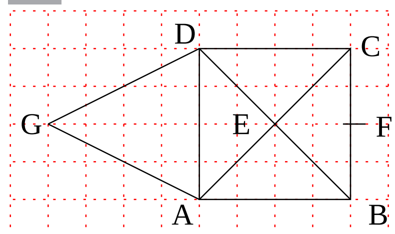
Montrer que A, B et C sont alignés.

6 Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, soient les points A(1 ;0) ; B(2 ;0) ; C(0 ;4) et D(0 ;6).

a) Soit I le milieu de de [AC] et J le point défini par $\overrightarrow{OI}=\frac{12}{7}\overrightarrow{OJ}$. Calculer les coordonnées des points I et J.

b) Montrer que le point J est sur la droite (BD).

7



Sur la figure ci-dessus, on définit le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

a) Quels sont les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G dans ce repère ?

b) Montrer que E, F et G sont alignés.

8 Soit ABC un triangle. I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$.

On définit le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

a) Ecrire les coordonnées des points A, B, C, I et J dans ce repère.

b) Montrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

9 Soit ABC un triangle. On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

a) Déterminer les coordonnées du point D vérifiant : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}$.

b) Démontrer que B, C et D sont alignés.

10 Soit ABC un triangle. Soient les points M, N et P tels que

$\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA}$

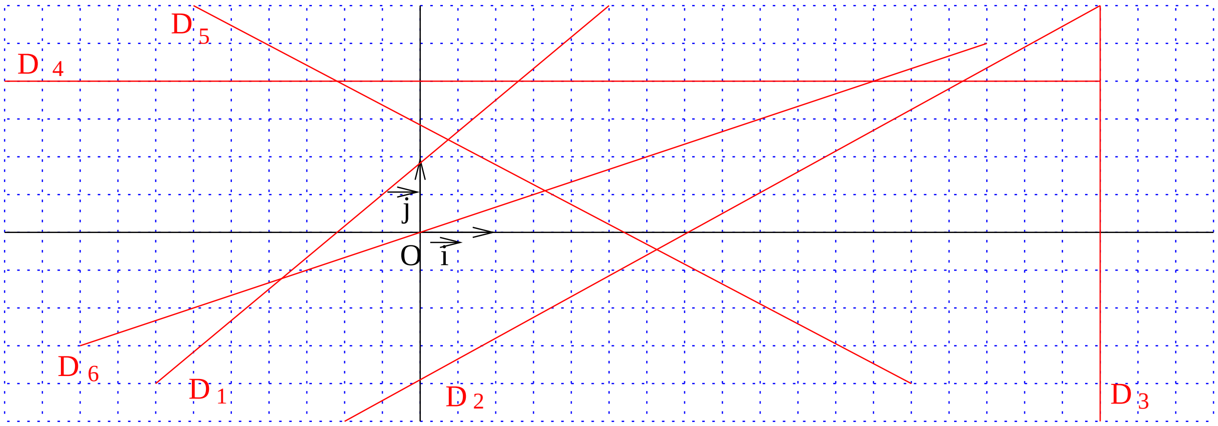
$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{6}\overrightarrow{PB}$.

a) Ecrire les coordonnées des points A, B, C, M, N et P dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

b) Montrer que M, N et P sont alignés.

Equations de droites

11 Par lecture graphique, donner une équation de chacune des droites dans le repère repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



12 Soit la droite D d'équation : $y = 3x - 2$.
Est-ce que les points A(3 ;2) ; B(1 ;1) ; C(5 ;13) et E(0 ;0) appartiennent à la droite D ?

13 Les points A(a ;2) ; B(−1 ;b) ; C(c ;−5) et D($\sqrt{3}$;d) sont sur la droite Δ d'équation $y = 5x + 2$.

Calculer a, b, c et d puis tracer la droite Δ.

14 Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, tracer les droites suivantes :
$D_1 : \; y = 2x - 3$ $\qquad D_2 : \; y = -3x + 1$

$D_3 : \; y = 2$ $\qquad D_4 : \; x = 5$

$D_5 : \; y = -2x$ $\qquad D_6 : \; y = 1 - x.$

Pour chaque droite, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

15
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) et l'écrire sous la forme ax+by=0 avec

a) A(1 ;3) et B(−1 ;1)

b) A(3 ;−1) et B(−4 ;1)

c) A(1 ;2) et B(3 ;2).

16 Déterminer une équation cartésienne de la droite de coefficient directeur m qui passe par le point A pour
a) m=1 et A(2 ;−1)

b) m=$-\frac{1}{3}$ et A($-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{6}$).

17 Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A des droites suivantes, puis les tracer.

$D_1 : \; x + y - 1 = 0$ $\qquad D_2 : \; -3x + y + 5 = 0$

$D_3 : \; y = -x + 3$ $\qquad D_4 : \; x = 3y - 1$

$D_5 : \; y = 2$ $\qquad D_6 : \; x = -3.$

18 Parmi les droites suivantes, déterminer celles qui sont parallèles ou perpendiculaires.

$D_1 : \; 6x - 4y + 3 = 0$ $\qquad D_2 : \; 3x - 2y + 1 = 0$

$D_3 : \; 2x + 3y - 3 = 0$ $\qquad D_4 : \; y = \frac{2}{3}x + 5$

$D_5 : y = -\,\frac{3}{2}x - 2$ $\qquad D_6 : \; 3x + y - 7 = 0$

19 a) Déterminer une équation de la droite Δ_1 passant par A(3 ;2) et B(−1 ;5).

b) Déterminer une équation de la droite Δ_2 passant par C(3 ;2) et de coefficient directeur −3.

c) Déterminer une équation de la droite Δ_3 passant par D(3 ;−2) et E(3 ;4).

d) Déterminer une équation de la droite Δ_4 passant par E(5 ;1) et F(2 ;1).

e) Déterminer une équation de la droite Δ_6 passant par G(1 ;2) et parallèle à la droite d'équation $y = \frac{2}{5}x - 3$.

f) Déterminer une équation de la droite Δ_6 passant par H(−3 ;2) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -2x + 1$.

20 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - 7y = 13 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 5y = 21 \\ 3x - 7y = -29 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 3x - 7y - 8 = 0 \end{cases}$$

21 Deux café et quatre cocas coûtent 8,80 euros.

Trois cafés et deux cocas coûtent 6,80 euros.

Quel est le prix d'un café ? d'un coca ?

22 La salle de spectacle compte 400 places.

Les parterres sont à 18 euros et les balcons sont à 16 euros.

Quand le théâtre est plein, la recette est de 6840 euros.

Combien y a t-il de places au balcon ? au parterre ?

23 1°) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 76 \\ 7x + 9y = 614 \end{cases}$$

2°) Une personne achète 76 plants d'arbres fruitiers constitués de pommiers à 7 euros le pied et de poiriers à 9 euros le pied.
Le montant de la facture s'élève à 614 euros.

a) Mettre le problème en équation.

b) Déterminer le nombre d'arbres fruitiers de chaque sorte.

24 Pour fêter ses 35 ans, Jean veut offrir à sa femme un bouquet de 35 fleurs, composé d'iris et de roses.
Un iris coûte 2 euros et une rose coûte 3 euros.
Son bouquet lui revient à 86 euros.

Combien Jean a t-il acheté d'iris et de roses ?

25 Au théâtre, le prix normal d'un billet est de 24 euros.

1°) Certains spectateurs peuvent bénéficier d'une réduction de 20 %. Combien paient-ils leur entrée ?

2°) Un groupe de 25 personnes va au théâtre, certains paient 24 euros et d'autres 19,2 euros.

Sachant que pour les 25 entrées, le groupe a payé 556,8 euros, trouver le nombre de billets à 24 euros et le nombre de billets à 19,2 euros.

26 Au café, Pierre et ses amis ont commandé 3 cafés et 2 chocolats pour la somme de 6 euros.

Paul et ses camarades ont payé 8 euros pour deux cafés et quatre chocolats.

Trouver le prix d'un café et le prix d'un chocolat.

28 Un père a le triple de l'âge de son fils.

Dans 15 ans, l'âge du père sera le double de l'âge de son fils.

Quel est l'âge du fils et du père ?

29 La somme de deux nombres x et y est 158.

En ajoutant 25 à chacun des deux nombres, l'un devient le triple de l'autre.

Quels sont ces deux nombres ?

30 Trouver deux nombres x et y connaissant leur différence 25 et la différence de leur carré 1375.

31 Un élève a deux notes sur 20 en maths, l'une de contrôle notée x et affecté du coefficient 3, l'autre de devoir notée y et affecté du coefficient 2.

On appelle moyenne pondérée le nombre :

$m = \dfrac{3x + 2y}{5}$

1°) Calculer la moyenne pondérée de Fabien qui a eu 12 en contrôle et 14 en devoir.

2°) Joël veut avoir 10 de moyenne pondérée. Il a eu 7 au devoir.

Quelle note lui faut-il au contrôle ?

3°) Elsa a eu 14 de moyenne pondérée.

Elle s'aperçoit qu'en intervertissant les notes du devoir et du contrôle, elle obtient une moyenne pondérée de 16.

Quelles sont ses notes au devoir et au contrôle ?

4°) En intervertissant ses notes de devoir et de contrôle, Béatrice trouve deux fois la même moyenne pondérée qui est 12.

Quelles sont ses notes en devoir et en contrôle ?

Devoirs

Devoir n°1

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère les points A(−1 ;1) ; B(5 ;−1) et C(4 ;6).

1°) Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment [AB].

2°) Le point D est le symétrique du point C par rapport à M. Calculer les coordonnées du point D.

3°) a) Vérifier par un calcul que les points A et B appartiennent à la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

b) Déterminer l'équation de la droite (CD).

c) Calculer les longueurs AM ; MC et AC.

d) En déduire que (AB) est perpendiculaire à (CD).

4°) Montrer que le quadrilatère ACBD est un losange.

Devoir n°2

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne les points A(1 ;−2 ; B(3 ;2) et C(7 ;0).

1°) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2°) Déterminer l'équation de la droite (AC).

3°) Vérifier que les points B et D appartiennent à la droite d'équation : $y = -3x + 11$.

4°) Calculer les coordonnéees du point d'intersection M des droites (AC) et (BD).

5°) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DM}$.

6°) Soit K le milieu du segment [AD]. Calculer les coordonnées du point K.

7°) Montrer que les points C, G et K sont alignés.

Devoir n°3

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$:

1°) Tracer la droite (D) d'équation : $y = -0,5x + 3$.

2°) La droite (D) coupe la droite (OI) en A et la droite (OJ) en B. Calculer les coordonnées de A et de B.

3°) Par N(−2 ;0), on trace la parallèle à (D) qui coupe (OJ) en M. Déterminer les coordonnées du point M.

4°) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant :

$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = 0$

5°) Déterminer les coordonnées du milieu E du segment [AC].

6°) Monter qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{BE}$.

Devoir n°4

1°) a) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

b) Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, tracer les droites (D) et (D') d'équation $2x + y - 4 = 0$ et $x - 3y + 5 = 0$.

c) Vérifier graphiquement le résultat du 1°).

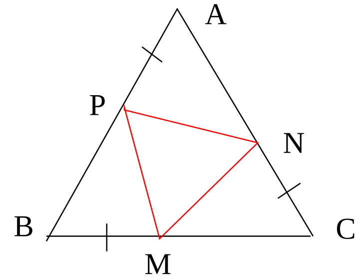
2°) Répondre aux mêmes questions pour le système :

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ -2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

1 ABC est un triangle équilatéral, M, N, P sont des points de [BC], [CA], [AB] tels que BM = CN = AP.

1. Démontrer que les triangles BMP, CNM et NAP sont isométriques deux à deux.

2. En déduire que MNP est équilatéral.



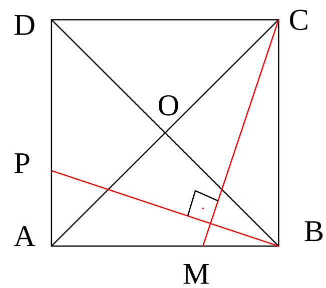
2 ABCD est un carré de centre O, M un point de [AB]. On mène par B la perpendiculaire à (CM) qui coupe (AD) en P.

1. a) Démontrer que $\widehat{MCB} = \widehat{ABP}$.

b) En déduire que les triangles MCB et ABP sont isométriques et que MB = AP.

2. a) Démontrer que les triangles OMB et OPA sont isométriques.

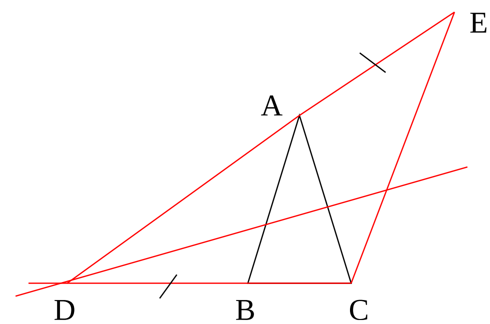
b) En déduire que le triangle POM est rectangle et isocèle.



3 ABC est un triangle isocèle en A. La médiatrice de [AC] coupe la droite (BC) en D. Le point E de la droite (AD) est tel que AE = BD.

1. Démontrer que les triangles ABD et ACE sont isométriques.

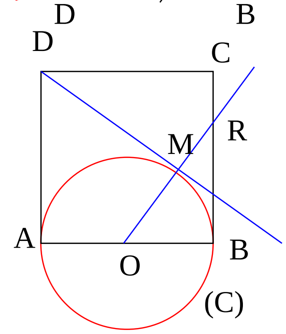
2. En déduire que le triangle CDE est isocèle.



4 ABCD est un carré, (DM) est tangente au cercle (C) de diamètre [AB].

1. Démontrer que les triangles OAD et OMD sont isométriques.

2. Démontrer que les triangles DMR et DCR sont isométriques. En déduire la nature du triangle CMR.



5 ABCD est un parallélogramme, N un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.

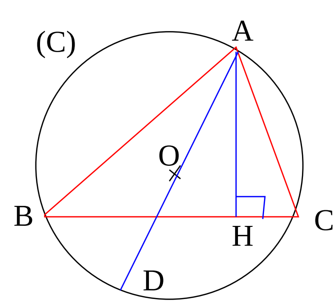
1. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.

2. En déduire que $DN \times BM = AB \times AD$.

6 (C) est un cercle de centre O de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans (C) tel que l'angle est aigu. H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. La droite (AO) recoupe C en D.

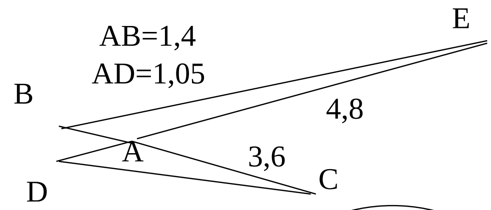
1. Démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables.
2. On pose AB = c, AC = b et AH = h.

Déduire de la question précédente que bc = 2rh.



7 1. Quel théorème permet de montrer que les triangles DAC et BAE sont semblables (les mesures sont en mm) ?

2. Quel est le rapport des aires de ces deux triangles ?



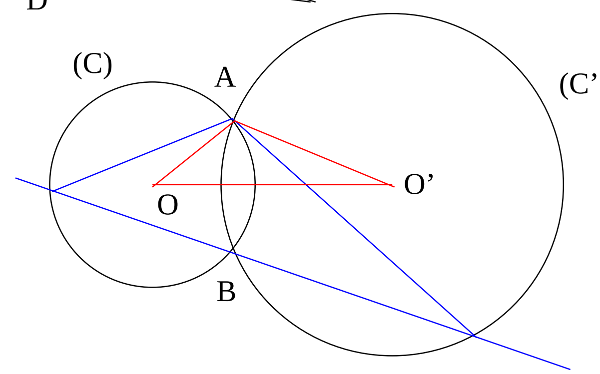
8 Deux cercles (C) et (C') de centre O et O' se coupent en A et B. Une droite passant par B coupe C en M et C' en M'.

1. a) Démontrer que (OO') est la médiatrice de [AB].

b) En déduire que $\widehat{AMB} = \widehat{AOO'}$.

2. a) Démontrer que les triangles OAO' et MAM' sont des triangles semblables.

b) En déduire que $\frac{AM}{AM'} = \frac{r}{r'}$ où r et r' sont les rayons respectifs de (C) et (C').



9 Dans un repère orthonormé, A, B, C, E, F, G sont les points dont voici les coordonnées : $A(-4;0)$; B(3 ;11) ; C(6 ;6) ; E(0 ;−5) ; F (1 ;-4) ; G(3 ;-6).

1. Démontrer que les triangles ABC et EFG sont de même forme.

2. Calculer l'aire de ABC.

3. Calculer de deux façons différentes l'aire de EFG.

10 ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur [BC], $\widehat{BAH} = 45^\circ$, $\widehat{HAC} = 30^\circ$ et AH = 6 cm.

Le cercle C de diamètre [AH] et de centre O coupe (AB) en D et (AC) en E.

1. a) Calculer AB et AC.

b) Montrer que $AE = 3\sqrt{3}$ cm.

2. a) Démontrer que $\widehat{AHE} = \widehat{ADE} = 60^\circ$.

b) Démontrer que BAC et EAD sont semblables.

c) En déduire que $\frac{\sqrt{6}}{4}$est le rapport de réduction qui fait passer du triangle BAC au triangle EAD.

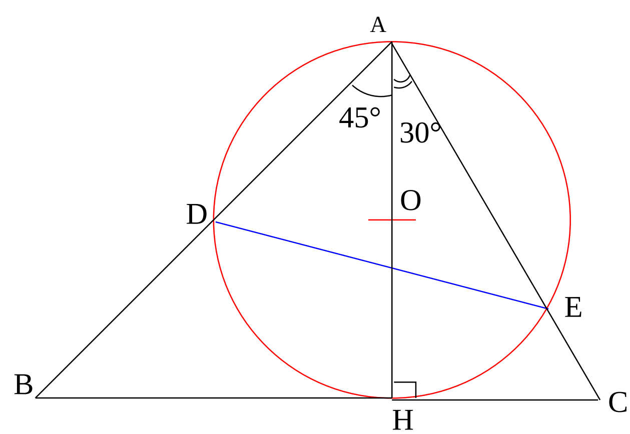
3. a) Calculer BC.

b) En déduire que $DE = \frac{3}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm.

4. On note F le point diamétralement opposé à D sur C.

a) Démontrer que $\widehat{DFE} = 75^\circ$.

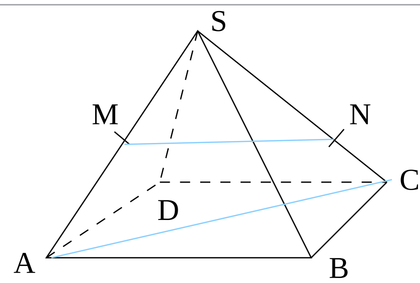
b) En déduire que $sin 75^\circ = (\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.



1 SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA], N est le point de [SC] tel que SN $= \dfrac{2}{3}$ SC.

1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.

2. Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).



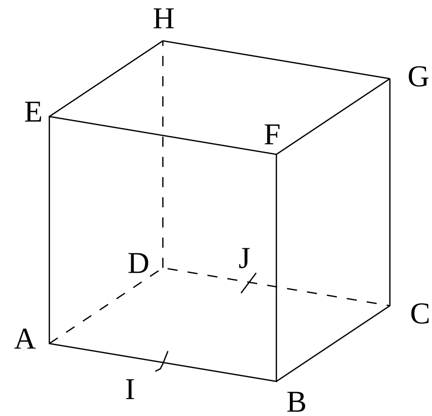
2 ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].J est le milieu de [CD].

Quel est dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans ? Justifier chaque réponse.

1. Le plan (AIE) et le plan (BIG).

2. Le plan (ADI) et le plan (BJC).

3. Le plan (HEF) et le plan (BJC).

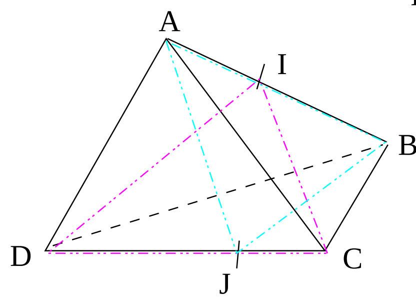


3 Dans un tétraèdre ABCD, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CD].

Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).

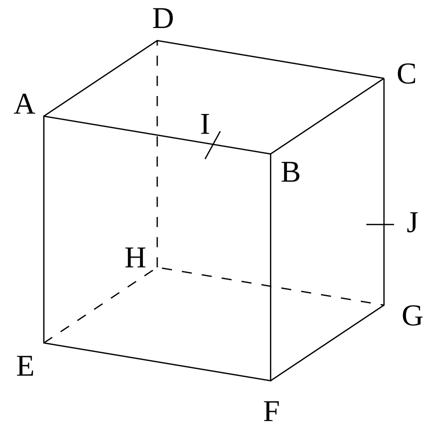
2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.



4 On considère un cube ABCDEFGH, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CG].

1. Montrer que les points I et J appartiennent à la fois aux plans (ABJ) et (CGI).

2. Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CGI).



5 ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD].

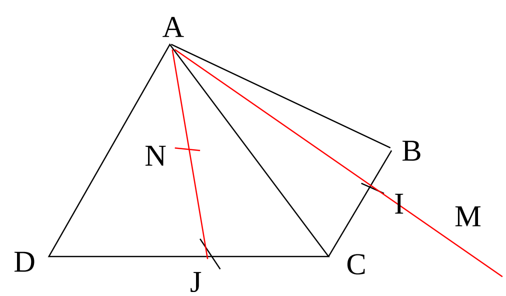
N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI) extérieur au segment [AI].

1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?

2. a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.

b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).

Prouver que P est sur (IJ).



6

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].

On se propose de représenter la droite Δ, intersection des plans (DFI) et (EFG).

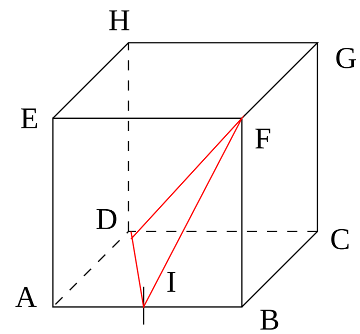
1. Pourquoi F appartient-il à Δ ?

2. Quelle est l'intersection des plans (DIF) et (ABC) ?

3. Que sait-on sur les plans (ABC) et (EFG) ?

En déduire la droite Δ.

4. Tracer Δ puis tracer la section du cube par le plan (DIF).



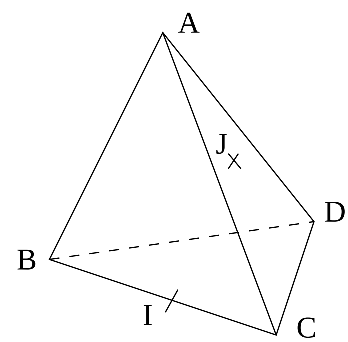
7

Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [BC] et J un point de la face ACD (autre que A).

1. Construire l'intersection Δ du plan (AIJ) avec le plan (BCD).

2. Le plan (AIJ) est-il toujours sécant au plan (ABD) ?

Construire l'intersection des plans (AIJ) et (ABD).



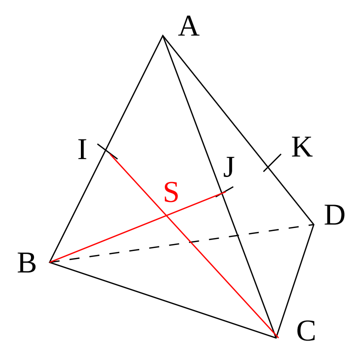
8

Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point du segment [AD] tel que $AK = \dfrac{2}{3}\,AD$.

1. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en S. Que représente le point S pour le triangle ABC ?

2. Construire l'intersection des plans (ASD) et (BDC).

3. Déterminer l'intersection de la droite (IK) avec le plan (BCD).



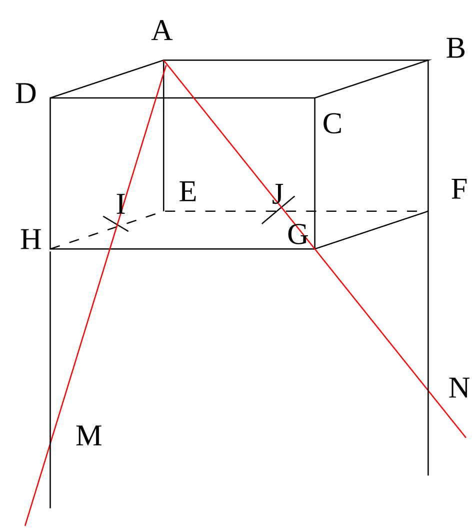
9

I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [EF] du parallélépipède rectangle ABCDEFGH.

Les droites (AI) et (DH) se coupent en M.

Les droites (AJ) et (BF) se coupent en N.

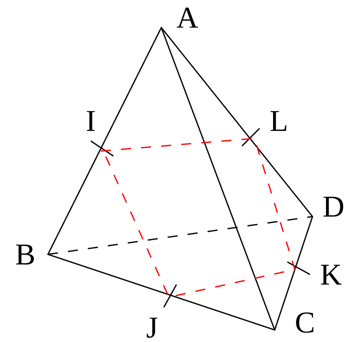
Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.



10 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD].

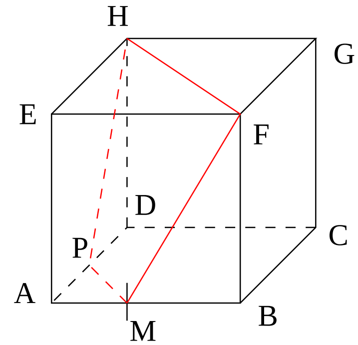
1. Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles et que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

2. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?



11 ABCDEFGH est un cube. M est un point de l'arête [AB]. Le plan (FHM) coupe (DA) en P.

Démontrer que les droites (FH) et (MP) sont parallèles.



12 SABCD est une pyramide de sommet S ; la base ABCD est un parallélogramme. M est un point de l'arête [SC] et N de l'arête [SB] ; de plus (MN) est parallèle à (BC).

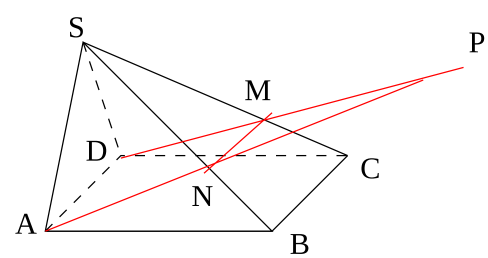
1. Démontrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.

2. Dans le plan (ADMN), les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.

a) Démontrer que le point P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).

b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?

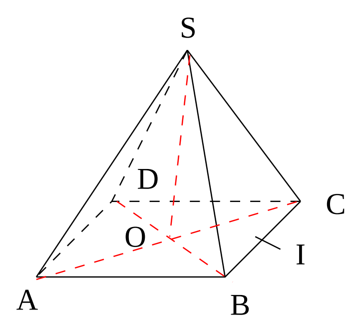
c) En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).

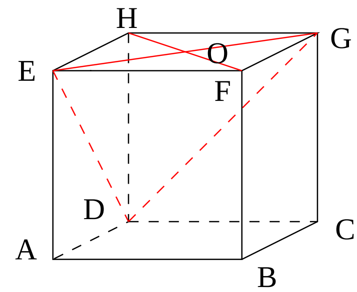


13 SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD ; O est le centre de ABCD. (SO) est donc la hauteur de la pyramide. I est le milieu de l'arête [BC].

1. Démontrer que (SO) est orthogonale à la droite (CB).

2. En déduire que (CB) est orthogonale au plan (SOI).





14 ABCDEFGH est un cube, AB = 4 cm. O est le centre du carré EFGH.

1. Prouver que la droite (OD) est l'intersection des plans (EDG) et (HDBF).

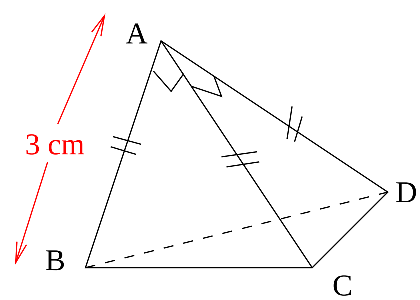
2. a) Dessiner en vraie grandeur le rectangle HFBD, placer O.

b) En calculant tan $\widehat{HDO}$ et tan $\widehat{HDB}$, prouver que
(HB) et (OD) sont perpendiculaires.

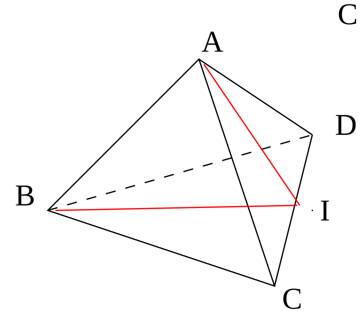
3. a) Démontrer que (HD) est orthogonale à (EG).

b) En déduire que (EG) est orthogonale au plan (HFBD), puis à (HB).

4. Démontrer que (HB) est orthogonale au plan (DEG).



15 Les faces ABC, ACD et ABD de cette pyramide sont des triangles rectangles et isocèles en A et AB = 3 cm.
Calculer le volume V de cette pyramide .



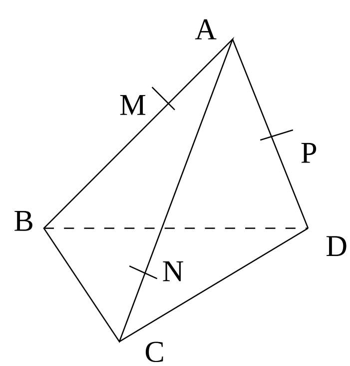
16 ABCD est un tétraèdre régulier, I est le milieu de [CD]. On trace les segments [AI] et [BI].

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

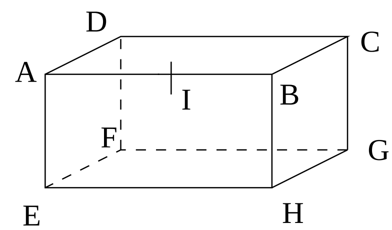
17 ABCD est un tétraèdre. M est le point de [AB] tel que AM = $\frac{1}{3}$ AB, N est le point de [AC] tel que AN = $\frac{1}{4}$ AC et P le milieu de [AD].

1. Démontrer que (MN) coupe (BC), que (NP) coupe (CD) et que (MP) coupe (BD).

2. On note I, J, K, ces points d'intersection. Démontrer que ces trois points sont alignés.



18 Dans ce pavé, I est le milieu de l'arête [AB].
Construire la trace du plan (IEG) sur le pavé.
Quelle est nature du polygone obtenu ?



19 SABC est un tétraèdre.
La droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) et le triangle ABC est rectangle en B.

1. a) Démontrer que (BC) et (SA) sont orthogonales.

b) Démontrer que le triangle SBC est rectangle en B.

2. H est un point de l'arête [AB] ; on trace par H le plan (P)
orthogonal à (AB).

Ce plan coupe (AC) en I, (SC) en J et (SB) en K.

a) Démontrer que les droites (HI) et (BC) sont parallèles.

b) En déduire que les droites (HI) et (KJ) sont parallèles.

c) Démontrer que les droites (KH) et (SA) sont parallèles.

d) En déduire que les droites (HK) et (IJ) sont parallèles.

e) Démontrer que HIJK est un rectangle.

3. On suppose à présent que AB = 1 et que SA = BC = 2. On pose AH = x.

a) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, que HI = 2x.

b) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle SAB, que HK =$2(1-x)$.

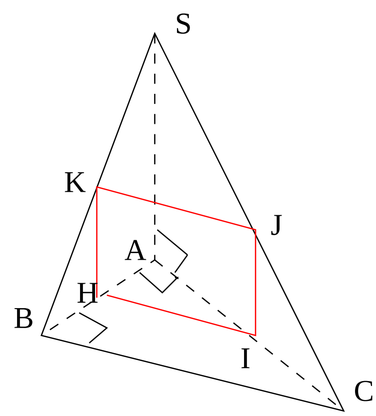
c) Calculer l'aire du rectangle HIJK en fonction de x. On note A(x) cette aire.

4. a) Démontrer que $4x(1-x) = 1-(1-2x)^2$.

b) Pour quelle valeur de x l'aire A(x) est-elle maximale ?

Quelle est alors la position du point H sur [AB].

Quelle est alors la nature du quadrilatère HIJK ?



Révisions n°1

Exercice n°1

Ecrire sous forme scientifique :

A=32 000 000 $\times 10^{-4}$

B=0,000 34

C=$\dfrac{3\times10^{-2}\times\left(2\times13^3\right)^3}{10^{-5}}$

Exercice n°2

Ecrire le plus simplement possible :

D=$2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+4\sqrt{3}$

E=$3\sqrt{2}\times4\sqrt{12}\times\sqrt{5}$

F=$\dfrac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}-\dfrac{3\sqrt{5}-3}{5}$

Exercice n°3

Résoudre l'équations et l'inéquations suivantes :

$25(x-3)^2=4x^2+4x+1$

$\dfrac{(2-x)^2(x+5)}{x(3+x)}\leq 0$

Exercice n°4

1°) Calculer : A=$|2\sqrt{3}-1|+|2\sqrt{3}-6|$

2°) Résoudre graphiquement :

$|x-3|=5$

$|x-5|\geq 5$

$|x+2|\leq 1$

Exercice n°5

Sur la figure ci-contre, la fonction f(x) est représentée en vert et la fonction g(x) en rouge. L'unité est le carreau.

1°) a) Quelle est l'image de 0 par f ?

b) Quel est l'antécédant de 3 par g ?

2°) Tracer le tableau de variation de la fonction f.

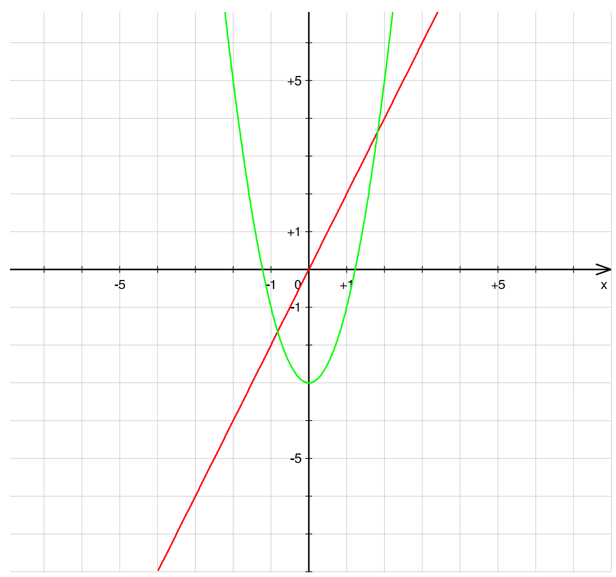
3°) Résoudre graphiquement :

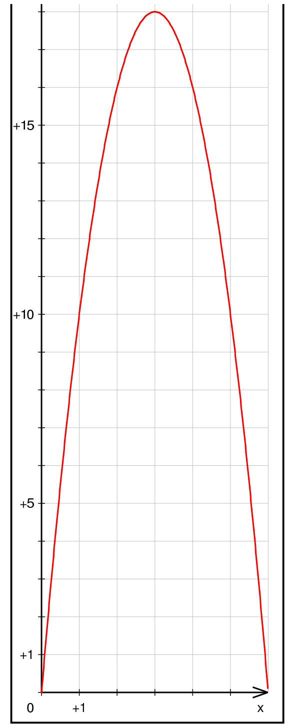
f(x)=2

f(x)$\leq$ 0

f(x)=g(x)

f(x)$\leq$g(x).





Exercice n°6

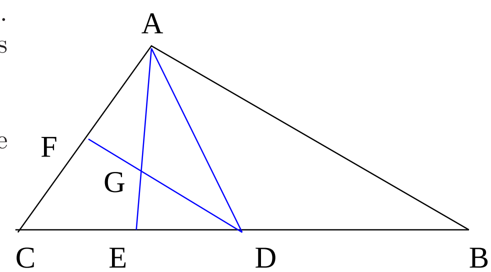
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=6 cm et AC=12 cm. E est un point du segment [AB] distinct de A et de B. On pose EB=x. La parallèle à la droite (AC) passant par E coupe la droite (BC) en F. La parallèle à la droite (AB) passant par F coupe la droite (AC) en G.
1°) Montrer que AEFG est un rectangle.
2°) Ecrire la longueur AG en fonction de x.
3°) Déterminer l'aire A(x) du rectangle en fonction de x.

La fonction A(x) est représentée ci-contre. En abscisse, un carreau représente 1cm. En ordonnée, un carreau représente 1 cm^2

4°) En utilisant la courbe, répondre aux questions suivantes :
a) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles l'aire du rectangle est égale à 10 ?
b) Quel est l'axe de symétrie de cette courbe ?
c) Quelles est la valeur maximale de l'aire du rectangle AEFG ?
Où se trouve le point E correspondant ?

Exercice n°7

ABC est un triangle tel que BC=2AC. D est le milieu de [BC]. E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [AC]. Les segments [AE] et [DF] se coupent au point G.
1°) Démontrer que ACD est un triangle isocèle en C.
2°) Démontrerque (CG) est la médiane issue de C du triangle ACD.
3°) Montrer que AE=DF.
4°) Démontrer que AGD est un triangle isocèle en G.



Révisions pour le devoir commun de Pâques

1 1) Représenter graphiquement la fonction carré définie par f(x) = x^2.

2) Compléter :

si $0 \leq x \leq$ alors ... $\leq x^2 \leq$ ...

si $-2 < x < 0$ alors ... $< x^2 <$ ...

si $-2 \leq x \leq 3$ alors .. $\leq x^2 \leq$...

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $x^2 = 4$

b) $x^2 + 3 = 0$

c) $x^2 < 4$

d) $x^2 \geq 9$

2

1)Représenter graphiquement la fonction inverse définie par g(x) = $\dfrac{1}{x}$

2) Compléter :

si $x < -1$ alors ... $< \dfrac{1}{x} <$ ...

si $1 \leq x \leq 2$alors ... $\leq \dfrac{1}{x} \leq$...

3) Résoudre dans$\mathbb{R}$:

a)$\dfrac{1}{x} = -3$

b)$\dfrac{1}{x} \geq 2$

c) $\dfrac{1}{x} \leq 1$

3 Résoudre l'inéquation : $\dfrac{(2x-3)(x+2)^2}{(-x+1)(3x+1)} \leq 0$

4 Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on donne les points A(2 ; 5), B(4 ; −2), C(−5 ; 1) et D(−1 ; 6).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?

3. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Déterminer les coordonnées du point K.

4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].

5. Démontrer que les points I, K et A sont alignés.

5 ABC est un triangle.

Les points N et P sont tels que :

$\overrightarrow{AN} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure et placer les points N et P.

2. a) Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AN}$.

c) Que peut-on conclure ?

6 f est une fonction affine telle que f(2) = 1 et f(−3) = 4.

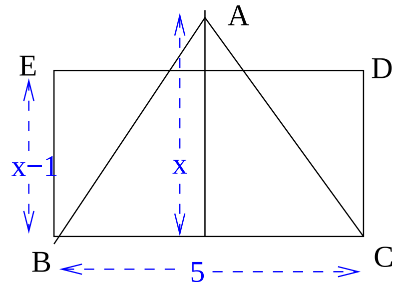
1. Exprimer f(x) en fonction de x.

2. Sans effectuer la représentation graphique de la fonction f, donner, en justifiant, le sens de variation de f.

3. Calculer f($-\dfrac{1}{2}$).

4. Résoudre l'inéquation f(x)= ≥ -2.

7 L'unité de longueur est le cm et l'unité d'aire est le cm^2.



ABC est un triangle isocèle en A tel que BC = 5.

H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose AH = x.

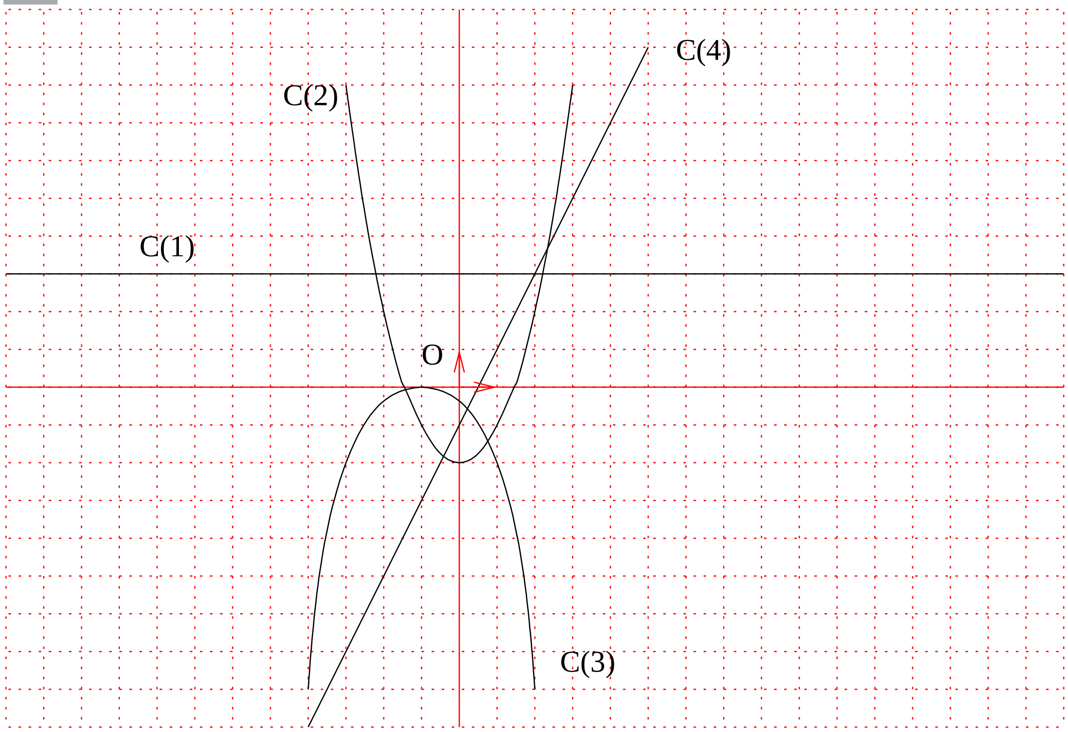
BCDE est un rectangle tel que BC = 5 et EB = x−1.

1. Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du triangle ABC et l'aire g(x) du rectangle BCDE.

2. Tracer dans un repère les courbes représentatives des fonction f et g. (les calculs devront figurer sur la copie.)

3. Trouver la hauteur AH pour laquelle le triangle ABC et le rectangle BCDE ont la même aire. On traitera cette question graphiquement et algébriquement.

8



Voici les représentations graphiques des fonctions :

$$f : x \mapsto x^2 - 2 \qquad g : x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)^2 \qquad h : x \mapsto 2x - 1 \qquad l : x \mapsto 3$$

Attribuer sa courbe à chaque fonction.

9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 5x^2 - 5x + 6$.

1°) Calculer les images de 0 et de 3.

2°) Déterminer les antécédants de 6 et de $-\frac{1}{4}$.

3°) Montrer que $f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

4°) Quel est le minimum de la fonction f ? Pour quelle valeur est-il atteint ?

5°) Tracer la courbe de f.

6°) En déduire le tableau de variation de f.

7°) Retrouver graphiquement les résultats du 1°) et du 2°).

8°) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $f(x) = 0$.

9°) Tracer la courbe de la fonction $g : x \mapsto -x + 4$

10°) Résoudre graphiquement f(x)=g(x) et $f(x) \leq g(x)$.

11°) Compléter : si $a \leq b \leq \frac{5}{2}$ alors $f(a)$.....$f(b)$..... $-\frac{1}{4}$ car f est ....sur.........................

10 Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, placer les points A(-1 ;5) ; B(1 ;1) ; C(3 ;2) et D(1 ;-4)

a) Déterminer la fonction f dont la courbe représentative est la droite (AB).

b) Déterminer la fonction g dont la courbe représentative est la droite (CD).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

d) En déduire la solutionde l'équation f(x)=g(x).

e) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

11 Dans la figure ci-contre, A, B, C et D sont cocycliques. On a :

AI=2,5

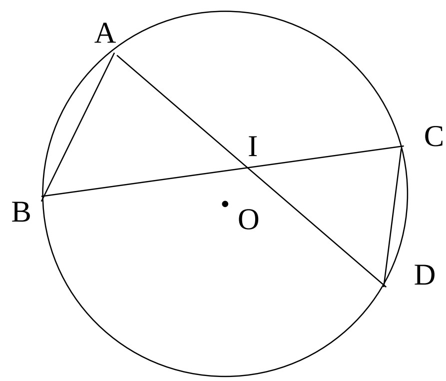
AB=3

BI=3,5

AD=6,2.

1°) Montrer que les triangles ABI et ICD sont semblables.

2°) Calculer les longueurs des côtés du triangle ICD.



12 Tracer un triangle ABC isocèle et rectangle en A.

Soit M un point du segment [BC].

La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe [AC] en P.

La parallèle à la droite (AC) passant par M coupe [AB] en N.

Soit I le milieu de [BC].

a) Montrer que AI=BI.

b) Montrer que ANMP est un rectangle.

c) Montrer que NM=BN puis que BN=AP.

d) Montrer que $\widehat{CAI}$ =45° et que $\widehat{ABC}$ ==45°.

e) Que peut-on en déduire pour les triangles AIP et BNI ?

f) Montrer que NI=IP.

g) Montrer que $\widehat{NIP}$ ==90°.